Zehnkampf November/Dezember 2003

Lösungen

Disziplin 1:

$$a) \quad \sum_{i=1}^{4} x_i = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

$$b) \quad \sum_{i=0}^{3} (-1)^i \cdot i^2 = 0 - 1 + 4 - 9$$

$$c) \quad \sum_{i=-1}^{2} \frac{i}{2i+1} = -1 + 0 + \frac{1}{3} + \frac{2}{5}$$

Disziplin 2:

$$a) \quad 1 - 3 + 5 - 7 + 9 - 11 = \sum_{i=1}^{6} (-1)^{i+1} \cdot (2i-1)$$

$$b) \quad 0 + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6} = \sum_{i=1}^{6} \frac{i-1}{i} = \sum_{i=0}^{5} \frac{i}{i+1}$$

$$c) \quad -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 = \sum_{i=1}^{6} (-1)^i$$

Disziplin 3: Prüfen Sie mit den Beispielwerten für n = 1, 2 und 3, ob folgende Aussage gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i$$

Berechnung für verschiedene Werte von n:

$\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i$:	$(n=1)$ $a_1 b_1$	$\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i$:	$(n=1)$ $a_1 b_1$
$\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i$:	$(n=2)$ $a_1 b_1 + a_2 b_2$	$\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i$:	$(n=2)$ $(a_1 + a_2)(b_1 + b_2)$
$\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i$:	$(n=3)$ $a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$	$\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i$:	$(n=3)$ $(a_1 + a_2 + a_3)(b_1 + b_2 + b_3)$

Ergebnis: Die Aussage gilt nur für n = 1 und ist daher nicht allgemeingültig.

Disziplin 4:

$$\begin{aligned} \sum_{i=20}^{1200} i &= \sum_{i=1}^{1200} i - \sum_{i=1}^{19} i \\ &= \frac{1.200 \cdot 1.201}{2} - \frac{19 \cdot 20}{2} \\ &= 720.600 - 190 \\ &= 720.410 \end{aligned}$$

Disziplin 5:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{5000} (2i-1) &= 2 \cdot \sum_{i=1}^{5000} i - \sum_{i=1}^{5000} 1 \\ &= 2 \cdot \frac{5.000 \cdot 5.001}{2} - 5.000 \cdot 1 \\ &= 25.000.000 \end{aligned}$$

Disziplin 6: :

$$\sum_{i=4}^{33} (3i+1) - \sum_{i=1}^{30} (2i+9) = \sum_{i=1}^{30} \left[3(i+3)+1\right] - \sum_{i=1}^{30} (2i+9) =$$

$$\sum_{i=1}^{30} (i+1) = \sum_{i=1}^{30} i + \sum_{i=1}^{30} 1 =$$

$$\frac{30 \cdot 31}{2} + 30 \cdot 1 = 495$$

Disziplin 7:

$$\sum_{i=5}^{50} (i+3) - \sum_{i=1}^{45} (-2i+1) = \sum_{i=1}^{46} (i+4+3) - \sum_{i=1}^{45} (-2i+1) =$$

$$\sum_{i=1}^{46} (i+7) - \sum_{i=1}^{45} (-2i+1) = 53 + \sum_{i=1}^{45} (i+7) - \sum_{i=1}^{45} (-2i+1) =$$

$$53 + \sum_{i=1}^{45} (3i+6) = 53 + 3 \cdot \sum_{i=1}^{45} i + \sum_{i=1}^{45} 6 =$$

$$53 + 3 \cdot \frac{45 \cdot 46}{2} + 45 \cdot 6 = 3.428$$

Disziplin 8: Wie groß ist n?

a)

$$\sum_{i=1}^{n} 3i = 3 \cdot \sum_{i=1}^{n} i \overset{!}{=} 165$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = 55$$

$$\frac{n \cdot (n+1)}{2} = 55$$

$$n^2 + n - 110 = 0 \Rightarrow n_1 = 10 \vee n_2 = -11$$

$$\Rightarrow L = \{10\}$$

b)

$$\sum_{i=1}^{n} 4i = 4 \cdot \sum_{i=1}^{n} i \overset{!}{=} 20.200$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = 5.050$$

$$\frac{n \cdot (n+1)}{2} = 5.050$$

$$n^2 + n - 10.100 = 0 \Rightarrow n_1 = 100 \vee n_2 = -101$$

$$\Rightarrow L = \{100\}$$

Disziplin 9: Zeigen Sie, dass für die Summe aller Zahlen aus dem 6er-Einmaleins Folgendes gilt:

$$Beh.: \sum_{i=1}^{n} 6i = 3 \cdot n \cdot (n+1)$$

Beweis:

$$\sum_{i=1}^{n} 6i = 6 \cdot \sum_{i=1}^{n} i = 6 \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} = 3 \cdot n \cdot (n+1) \quad q.e.d.$$

Disziplin 10: Ein Paar äh paar Nullstellen in Ehren, ...

a) $f(x) = x^2 - x - 1 \qquad L = \{\ \}$

b) $f(x) = 2x^4 - x^2 - 10 \qquad L = \{\pm\sqrt{2}\}$

c) $f(x) = x - \frac{1}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{2} \qquad L = \left\{\frac{1}{4}\right\}$

d) $f(x) = 2x^3 - x^2 - x \qquad L = \left\{-\frac{1}{2}; 0; 1\right\}$

Zusatzdisziplin: Grenzwerte für $x \to \pm\infty$

a) $f(x) = \frac{2x}{x-1} \Rightarrow \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x}{x-1} = 2$

b) $f(x) = \frac{3}{x} \Rightarrow \lim_{x \to \pm\infty} \frac{3}{x} = 0$

c) $f(x) = \frac{8}{x^2} \Rightarrow \lim_{x \to \pm\infty} \frac{8}{x^2} = 0$

d) $f(x) = \frac{x^2 - x}{2x^2} \Rightarrow \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - x}{2x^2} = \frac{1}{2}$

e) $f(x) = \frac{8 - x^2}{x^2 + 1} \Rightarrow \lim_{x \to \pm\infty} \frac{8 - x^2}{x^2 + 1} = -1$

$f_1)$ $f(x) = \frac{x^x}{2x^2} \Rightarrow \lim_{x \to \infty} \frac{x^x}{2x^2} \overset{L'Hospital}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{x^x \cdot (\ln x + 1)}{4x}$

$$\overset{L'Hospital}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{x^x \cdot (\ln x + 1)^2 + x^{x-1}}{4} = \infty$$

$f_2)$ $f(x) = \frac{x^x}{2x^2} \Rightarrow \lim_{x \to -\infty} \frac{x^x}{2x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{(-x)^{-x}}{2x^2}$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{1}{2x^2 \cdot (-x)^x} = 0$$