

Übungen zum Rechnen mit Determinanten

❶ Berechnen sie folgende Determinanten:

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \quad \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} & \text{b)} \quad \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & \text{c)} \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} & \text{d)} \quad \begin{vmatrix} 0,5 & 0,4 \\ 0,3 & 0,2 \end{vmatrix} & \text{e)} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \text{f)} \quad \begin{vmatrix} a & ab \\ 1 & -b \end{vmatrix} & \text{g)} \quad \begin{vmatrix} x^3 & x^2 \\ x & 1 \end{vmatrix} & \text{h)} \quad \begin{vmatrix} (a+b)^2 & 2a^2b^2 \\ -1 & (a-b)^2 \end{vmatrix} & \text{i)} \quad \begin{vmatrix} \sin(\beta) & -\cos(\beta) \\ \cos(\beta) & \sin(\beta) \end{vmatrix} \end{array}$$

❷ Bilden sie je drei (2 x 2)-Determinanten mit dem Wert

$$\text{a)} \quad 0 \quad \text{b)} \quad 1 \quad \text{c)} \quad \frac{3}{4} \quad \text{d)} \quad a \quad \text{e)} \quad x^2$$

❸ Berechnen sie die folgenden (3 x 3)-Determinanten

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \quad \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} & \text{b)} \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} & \text{c)} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} & \text{d)} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \text{e)} \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} & \text{f)} \quad \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} & \text{g)} \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} & \text{h)} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 34 \\ 0 & 3 & 54 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \end{array}$$

❹ Fassen sie zu einer Determinanten zusammen und berechnen sie ihren Wert

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \quad a \begin{vmatrix} e & h \\ f & i \end{vmatrix} - d \begin{vmatrix} b & h \\ c & i \end{vmatrix} + g \begin{vmatrix} b & e \\ c & f \end{vmatrix} & \text{b)} \quad r \begin{vmatrix} v & w \\ y & z \end{vmatrix} + s \begin{vmatrix} w & u \\ z & x \end{vmatrix} + t \begin{vmatrix} u & v \\ x & y \end{vmatrix} \\ \text{c)} \quad 5 \begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 8 & 7 \end{vmatrix} - 8 \begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} & \text{d)} \quad 5 \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \end{array}$$

❺ Berechnen sie die Determinanten nach entsprechender Umformung bzw. bekannten Sätzen

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \quad \begin{vmatrix} 4 & 5 & 22 \\ 0 & 0 & 0 \\ 18 & 3 & 1 \end{vmatrix} & \text{b)} \quad \begin{vmatrix} 16 & 7 & 9 \\ 15 & 8 & 8 \\ 4 & 5 & 7 \end{vmatrix} & \text{c)} \quad \begin{vmatrix} 18 & 4 & 6 \\ 9 & 2 & 3 \\ 14 & 5 & 27 \end{vmatrix} \\ \text{d)} \quad \begin{vmatrix} 18 & 28 & 38 \\ 28 & 38 & 48 \\ 38 & 48 & 58 \end{vmatrix} & \text{e)} \quad \begin{vmatrix} 21 & 10 & 6 \\ 16 & 8 & 2 \\ 18 & 9 & 7 \end{vmatrix} & \end{array}$$

- ⑥ Eine Matrix, deren Determinante den Wert 0 besitzt, heißt singular. Ist die Determinante von 0 verschieden, so nennt man die Matrix regulär.

Für welche Parameter-Werte sind die Matrizen singular bzw. regulär?

a) $\begin{vmatrix} t & 1 & 3 \\ 3 & 4 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} s & 0 & 2 \\ 8 & t & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 1 & t & 4 \\ t & 8 & -1 \\ -1 & -6 & 2 \end{vmatrix}$

- ⑦ Jetzt kommen ein paar größere Determinanten: Arbeiten sie vorteilhaft!

a) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} -5 & 4 & 3 & 18 \\ 0 & 2 & 17 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 91 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 3 & 9 \\ 2 & 6 & 1 & 5 \\ 3 & 8 & 1 & 2 \\ 6 & 6 & 2 & 5 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 8 & 20 & 16 \\ 25 & 9 & 1 & 12 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 5 & 4 & -2 \\ 7 & 8 & 6 & 7 & 0 \\ -1 & 4 & 9 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & 12 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

f) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$

- ⑧ Versuchen sie ein allgemeingültiges Bildungsgesetz für die folgenden Determinanten zu ermitteln

a) $|1|$ $\begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix}$... $\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \dots & x_3^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$

b) $|1|$ $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix}$... $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 2 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 3 & 3 & 3 & 4 & \dots & n \\ 4 & 4 & 4 & 4 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n & n & n & \dots & n \end{vmatrix}$