Notwendig und hinreichend???

Eigenschaft	notwendig	hinreichend
Monoton steigend	$f'(x) \geq 0$	$f'(x) \geq 0$
Monoton fallend	$f'(x) \leq 0$	$f'(x) \leq 0$
Maximum	$f'(x) = 0$	$f'(x) = 0 \quad und \quad f''(x) < 0$ oder: **Vorzeichenwechsel von** $f'(x_0 \pm \varepsilon)$ **an der Stelle x_0 von + nach -** $f'(x_0 - \varepsilon) > 0 \rightarrow f'(x_0 + \varepsilon) < 0$ mon. steigend / Max / mon. fallend
Minimum	$f'(x) = 0$	$f'(x) = 0 \quad und \quad f''(x) > 0$ oder: **Vorzeichenwechsel von** $f'(x_0 \pm \varepsilon)$ **an der Stelle x_0 von - nach +** $f'(x_0 - \varepsilon) < 0 \rightarrow f'(x_0 + \varepsilon) > 0$ mon. fallend / Min / mon. steigend
Links-krümmung	$f''(x) > 0$	$f''(x) > 0$
Rechts-krümmung	$f''(x) < 0$	$f''(x) < 0$
Wendepunkt	$f''(x) = 0$	$f''(x) = 0 \quad und \quad f'''(x) \neq 0$

Aussagenprüfung

Prüfen Sie, ob folgende Formulierungen richtig sind und begründen Sie die Korrektheit.

Sollte eine unwahre Aussage vorliegen, beweisen Sie diese durch ein Gegenbeispiel.

a) Die im Intervall I differenzierbare Funktion f(x) kann im Innern von I nur dann eine relative Extremstelle x_0 besitzen, wenn gilt:
$f'(x_0) = 0$

b) Eine im Intervall I differenzierbare Funktion f(x) kann an einer inneren Stelle x_0 höchstens dann ein relatives Extremum haben, wenn gilt:
$f'(x_0) = 0$

c) Eine im Intervall I differenzierbare Funktion f(x) hat stets x_0 als relative Extremstelle, falls gilt: $f'(x_0) = 0$

d) Hat die Funktion f(x) an der Stelle x_0 ein relatives Extremum, so muss gelten: $f'(x_0) = 0$

e) Eine im Intervall I differenzierbare Funktion f(x) kann an einer Stelle x_0 im Innern von I mit $f'(x_0) \neq 0$ kein relatives Extremum haben.

f) Die in einer Umgebung von x_0 differenzierbare Funktion f(x) hat immer dann x_0 als relative Extremstelle, wenn $f'(x_0) = 0$ und $f'(x_0)$ an der Stelle x_0 keinen Vorzeichenwechsel hat.

g) Nur dann hat die in einer Umgebung von x_0 differenzierbare Funktion f(x) die Stelle x_0 als relative Extremstelle, wenn $f'(x_0) = 0$ und $f'(x_0)$ an der Stelle x_0 einen Vorzeichenwechsel hat.

h) Stets wenn die Funktion f(x) in einer Umgebung von x_0 differenzierbar ist, $f'(x_0) = 0$ ist und $f'(x_0)$ an der Stelle x_0 einen Vorzeichenwechsel hat, ist x0 relative Extremstelle von f(x).

i) Hinreichend für eine relative Extremstelle x_0 einer in einer Umgebung von x_0 differenzierbaren Funktion f(x) ist $f'(x_0) = 0$ und ein Vorzeichenwechsel von $f'(x_0)$ an der Stelle x_0.

j) f(x) sei im Intervall I differenzierbar. x_0 liege im Innern in I. Hinreichend dafür, dass x_0 keine relative Extremstelle von f ist, ist $f'(x_0) \neq 0$.

k) $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$ ist ein hinreichendes Kriterium für einen relativen Tiefpunkt.

l) $f'(x_0) = 0$ ist ein hinreichendes Kriterium für einen relativen Extrempunkt.

m) $f''(x_0) < 0$ ist ein notwendiges Kriterium für einen relativen Hochpunkt.

n) $f'(x_0) = 0$ ist notwendig für einen relativen Hochpunkt.

o) $f'(x_0) = 0$ ist notwendig, aber nicht hinreichend für das Vorhandensein eines relativen Extrempunktes eines Graphen von f(x) an der Stelle x_0.

p) $f'(x_0) = 0$ ist hinreichend, aber nicht notwendig für das Vorhandensein eines relativen Extrempunktes eines Graphen von f(x) an der Stelle x_0.

Gibt es solche Funktionen?

Versuchen Sie den jeweiligen Graphen einer Funktion ***f(x)*** mit dem Definitionsbereich $D = [-3;3]$ zu zeichnen, die folgende Eigenschaften hat.
Sollte der Graph nicht existieren, so begründen Sie weshalb.

a) ***f(x)*** hat an drei Stellen ein relatives Maximum und an zwei Stellen jeweils ein relatives Minimum.

b) ***f(x)*** nimmt das absolute Maximum an drei Stellen an und hat zwei Stellen jeweils ein relatives Minimum.

c) ***f(x)*** ist stetig, hat an zwei Stellen ein relatives Minimum und an drei Stellen ein relatives Maximum. Das absolute Maximum und das absolute Minimum befinden sich an den Rändern des Definitionsbereichs.

d) ***f(x)*** hat an zwei Stellen ein relatives Minimum und an drei Stellen ein relatives Maximum. Das absolute Maximum und das absolute Minimum befinden sich an den Rändern des Definitionsbereichs.

e) ***f(x)*** ist stetig und nimmt an den Stellen $x_1 = -1$ und $x_2 = 2$ das absolute Maximum an, besitzt an der Stelle $x = 0$ ein relatives Maximum, hat aber kein absolutes Minimum.

Von nun an sei der Definitionsbereich $D = \Re$.

f) ***f(x)*** hat genau einen Wendepunkt und keinen relativen Extrempunkt.

g) ***f(x)*** hat genau einen Wendepunkt, genau einen relativen Hochpunkt und genau einen relativen Tiefpunkt.

h) ***f(x)*** hat genau einen Wendepunkt, genau einen relativen Hochpunkt und keinen relativen Tiefpunkt.

i) ***f(x)*** hat genau drei Wendepunkte und keinen relativen Extrempunkt.

j) ***f(x)*** hat genau zwei Wendepunkte und keinen relativen Extrempunkt.

k) ***f(x)*** hat genau zwei relative Tiefpunkte, genau einen relativen Hochpunkt und genau zwei Wendepunkte.

l) ***f(x)*** hat genau einen relativen Tiefpunkt, keinen relativen Hochpunkt und zwei Wendepunkte.

Gibt es solche Funktionen?

Versuchen Sie den jeweiligen Graphen einer Funktion ***f(x)*** mit dem Definitionsbereich $D = [-3;3]$ zu zeichnen, die folgende Eigenschaften hat.
Sollte der Graph nicht existieren, so begründen Sie weshalb.

a) ***f(x)*** hat an drei Stellen ein relatives Maximum und an zwei Stellen jeweils ein relatives Minimum.

b) ***f(x)*** nimmt das absolute Maximum an drei Stellen an und hat zwei Stellen jeweils ein relatives Minimum.

c) ***f(x)*** ist stetig, hat an zwei Stellen ein relatives Minimum und an drei Stellen ein relatives Maximum. Das absolute Maximum und das absolute Minimum befinden sich an den Rändern des Definitionsbereichs.

d) ***f(x)*** hat an zwei Stellen ein relatives Minimum und an drei Stellen ein relatives Maximum. Das absolute Maximum und das absolute Minimum befinden sich an den Rändern des Definitionsbereichs.

e) ***f(x)*** ist stetig und nimmt an den Stellen $x_1 = -1$ und $x_2 = 2$ das absolute Maximum an, besitzt an der Stelle $x = 0$ ein relatives Maximum, hat aber kein absolutes Minimum.

Von nun an sei der Definitionsbereich $D = \Re$.

f) ***f(x)*** hat genau einen Wendepunkt und keinen relativen Extrempunkt.

g) ***f(x)*** hat genau einen Wendepunkt, genau einen relativen Hochpunkt und genau einen relativen Tiefpunkt.

h) ***f(x)*** hat genau einen Wendepunkt, genau einen relativen Hochpunkt und keinen relativen Tiefpunkt.

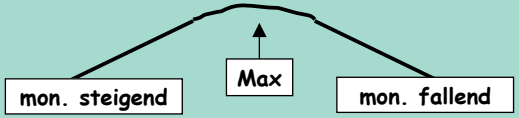
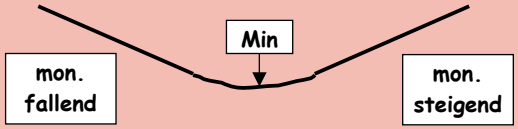
i) ***f(x)*** hat genau drei Wendepunkte und keinen relativen Extrempunkt.

j) ***f(x)*** hat genau zwei Wendepunkte und keinen relativen Extrempunkt.

k) ***f(x)*** hat genau zwei relative Tiefpunkte, genau einen relativen Hochpunkt und genau zwei Wendepunkte.

l) ***f(x)*** hat genau einen relativen Tiefpunkt, keinen relativen Hochpunkt und zwei Wendepunkte.

Notwendig und hinreichend???

Eigenschaft	notwendig	hinreichend
Monoton steigend	$f'(x) \geq 0$	$f'(x) \geq 0$
Monoton fallend	$f'(x) \leq 0$	$f'(x) \leq 0$
Maximum	$f'(x) = 0$	$f'(x) = 0 \quad und \quad f''(x) < 0$ oder: Vorzeichenwechsel von $f'(x_0 \pm \varepsilon)$ an der Stelle x_0 von + nach - $f'(x_0 - \varepsilon) > 0 \rightarrow f'(x_0 + \varepsilon) < 0$ 
Minimum	$f'(x) = 0$	$f'(x) = 0 \quad und \quad f''(x) > 0$ oder: Vorzeichenwechsel von $f'(x_0 \pm \varepsilon)$ an der Stelle x_0 von - nach + $f'(x_0 - \varepsilon) < 0 \rightarrow f'(x_0 + \varepsilon) > 0$ 
Links-krümmung	$f''(x) > 0$	$f''(x) > 0$
Rechts-krümmung	$f''(x) < 0$	$f''(x) < 0$
Wendepunkt	$f''(x) = 0$	$f''(x) = 0 \quad und \quad f'''(x) \neq 0$