Musterlösung **11. Jgst.** **3. Klassenarbeit** **Datum: 18.03.2010**

Klasse: HBF OM 09 **Fach: Mathematik**

Themen: **Gebr.-rat. Funktionen; Polynomdivision; Differentialquotient; Ableitung**

1.) Polynomdivision

a) $(4x^3-6x^2+8x-2):(x+3) \;=$

Lösung: $4x^2-18x+62$ Rest: -188

(4x^3 - 6x^2 + 8x - 2) : (x + 3) = $4x^2-18x+62$ Rest: -188

```
 4x^3 + 12x^2
 ————————————————————————————
    - 18x^2 + 8x -  2
    - 18x^2 - 54x
    ————————————————————————
          62x -  2
          62x + 186
          ——————————
             - 188
```

b) $(6x^4+10x^2-2):(2x^2+4x) \;=$

Lösung: $3x^2-6x+17$ Rest: $-34x-1$

(3x^4 + 5x^2 - 1) : (x^2 + 2x) = $3x^2-6x+17$ Rest: $-34x-1$

```
3x^4 + 6x^3
————————————————————————————————————
   - 6x^3 + 5x^2      - 1
   - 6x^3 - 12x^2
   ———————————————————————————————
         17x^2      - 1
         17x^2 + 34x
         ———————————————
            - 34x - 1
```

2.) Untersuchung gebr.-rat. Funktionen

Funktion	Nullstelle	Polstelle	Sy	Asymptote
$f(x) = \frac{-4x+8}{2x-3}$	**x = 2**	**x = 1,5**	$\left(0 \mid -\frac{8}{3}\right)$	**a(x) = - 2** **Zählergrad = Nennergrad**
$f(x) = \frac{0,25x^2-2,5x+6}{x+4}$	**x_1 = 4** **und** **x_2 = 6**	**x = - 4**	$\left(0 \mid \frac{3}{2}\right)$	$a(x) = \frac{1}{4}x - \frac{7}{2}$ *Rest: 20*
$f(x) = \frac{162}{x^4-81}$	**keine**	**x_1 = 3** **und** **x_2 = - 3**	$(0 \mid -2)$	**a(x) = 0** **Zählergrad < Nennergrad**

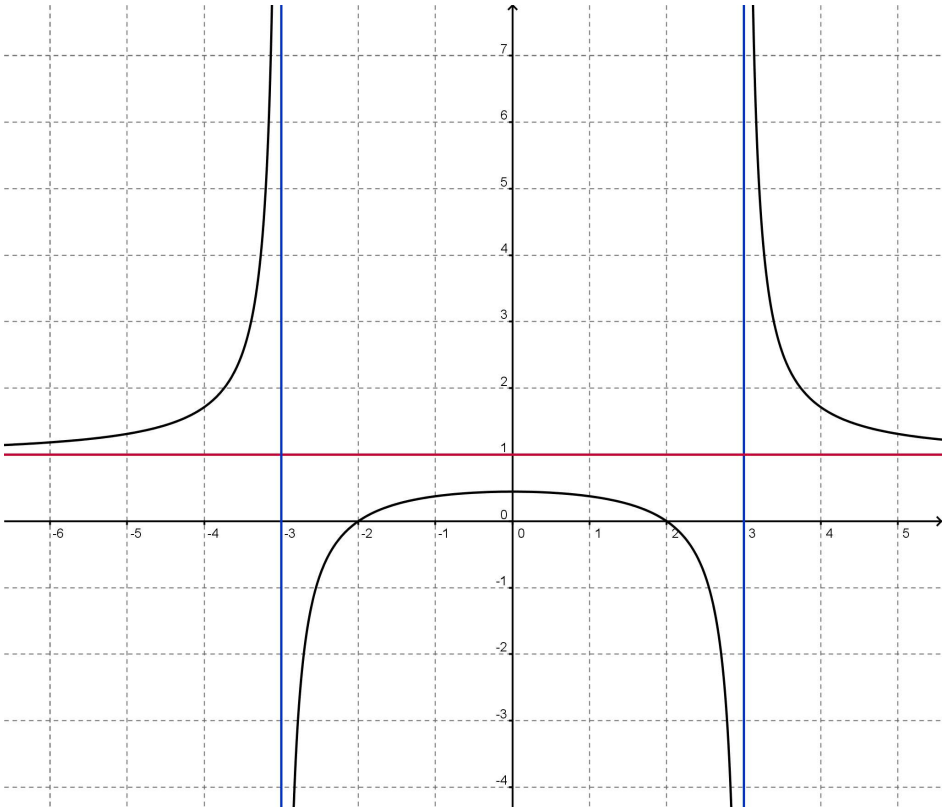
3.) Zeichnung gebr.-rat. Funktionen

a) Zeichnen Sie die gebrochen-rationale Funktion, die folgende Eigenschaften besitzt:

Nullstellen: $x_1 = 2$ und $x_2 = -2$ **Polstellen:** $x_1 = 3$ und $x_2 = -3$

Asymptote: $a(x) = 1$ **Schnittpunkt mit y-Achse:** $(0 / {}^4/_9)$

Lösung:



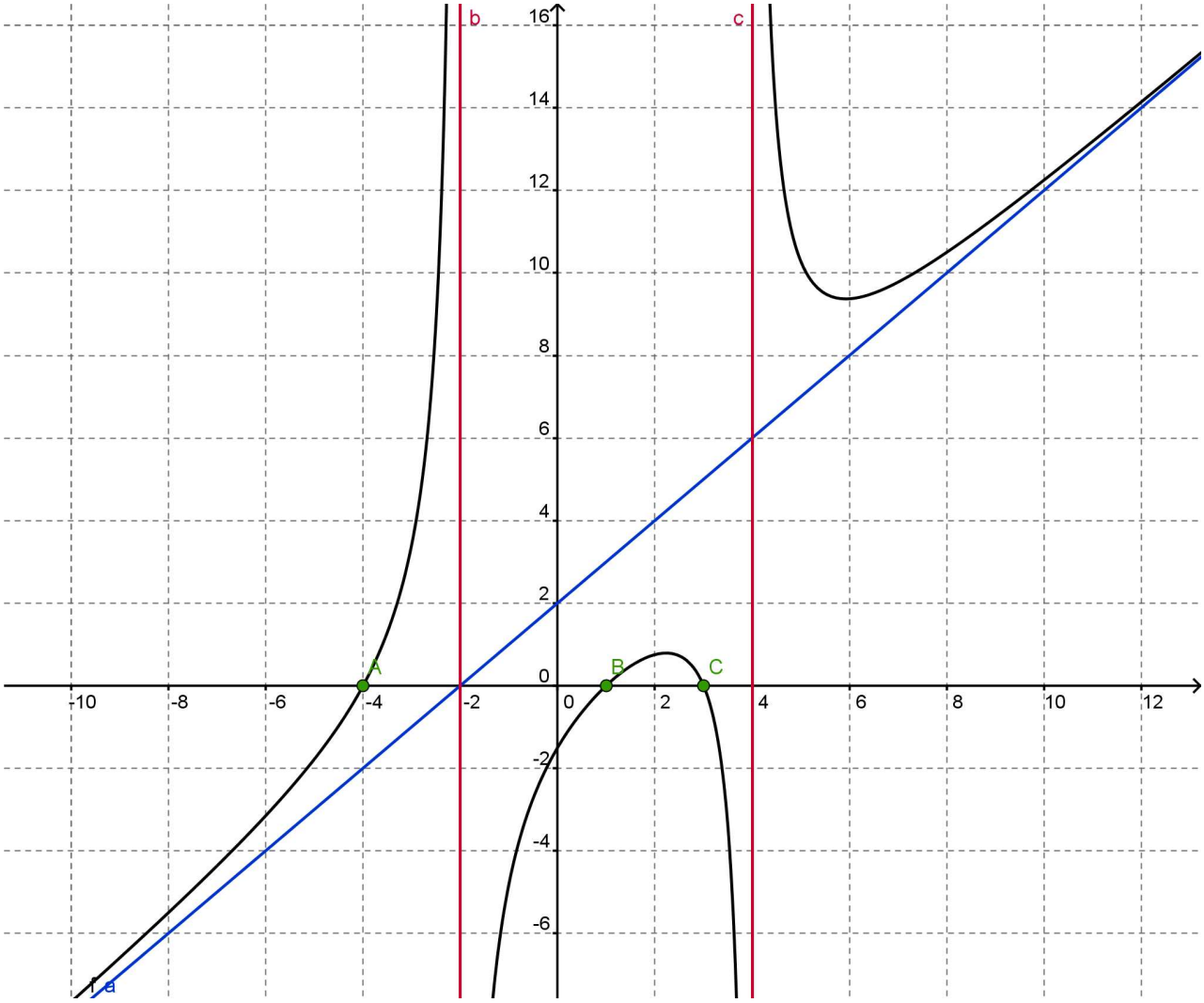
b) Zeichnen Sie die gebrochen-rationale Funktion, die folgende Eigenschaften besitzt:

Nullstellen: $x_1 = -4$ **und** $x_2 = 1$ **und** $x_3 = 3$

Polstellen: $x_1 = -2$ **und** $x_2 = 4$

Asymptote: $a(x) = x + 2$ **Schnittpunkt mit y-Achse: (0 / - 1,5)**

Lösung:



4.) Rekonstruktion einer gebr.-rat. Funktionen

Gegeben sei folgende Funktion: $f(x) = \dfrac{x-a}{x^2+bx+c}$ $mit\ a,b,c \in \Re$

Welche Werte müssen für a, b und c eingesetzt werden, damit die Funktion bei x = 1 eine Nullstelle und den Definitionsbereich $D = \Re \setminus \{-2\,;3\}$ d.h. Polstellen bei x = - 2 und x = 3 besitzt?

Lösung:

$$f(x) = \frac{x-a}{x^2+bx+c} \quad mit\ a,b,c \in \Re$$

$$Nullstelle: \quad x=1 \quad \rightarrow \quad a=1$$

$$Polstellen \leftrightarrow Nennernullstellen: (x+2)(x-3) = x^2-x-6$$

$$\xrightarrow{Koeffizientenvergleich:} \quad x^2+bx+c = x^2-x-6 \quad \rightarrow \quad b=-1 \quad und \quad c=-6$$

$$Ergebnis: \quad f(x) = \frac{x-1}{x^2-x-6}$$

5.) Ableitung mit der h-Methode

Bilden Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen mittels der h-Methode:

Formel: $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

a) $f(x) = 6x$

Lösung:

$$m_{Tan} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{6(x+h)-6x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{6x+6h-6x}{h}$$

$$m_{Tan} = \lim_{h \to 0} \frac{6h}{h} = \lim_{h \to 0} 6 = 6 = f'(x)$$

b) $f(x) = 5x^2$

Lösung:

$$m_{Tan} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{5(x+h)^2-5x^2}{h}$$

$$m_{Tan} = \lim_{h \to 0} \frac{5(x^2+2xh+h^2)-5x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{5x^2+10xh+5h^2-5x^2}{h}$$

$$m_{Tan} = \lim_{h \to 0} \frac{h(10x+5h)}{h} = \lim_{h \to 0} (10x+5h) = 10x = f'(x)$$

6.) Ableitungen

Bilden Sie die erste Ableitung der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = 5x^3 - 6x^2 + 4x - 2$

Lösung: $f'(x) = 15x^2 - 12x + 4$

b) $f(x) = \frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2$

Lösung: $f'(x) = x^5 - x^3 + x$

c) $f(x) = 3x^{-1} - 6x^{-2}$

Lösung: $f'(x) = -3x^{-2} + 12x^{-3} = -\frac{3}{x^2} + \frac{12}{x^3}$

d) $f(x) = 4x^{\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{1}{4}}$

Lösung: $f'(x) = 2x^{-\frac{1}{2}} - 0,5x^{-\frac{3}{4}}$

e) $f(x) = \left(x^2 - 5\right)^2$

Lösung:

$f(x) = \left(x^2 - 5\right)^2 = x^4 - 10x^2 + 25$

$f'(x) = \left(x^2 - 5\right)^2 = 4x^3 - 20x$

7.) Differenzenquotient

a) Berechnen Sie den Differenzenquotient bei x = 2 bei der Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^3$ und bestimmen Sie den Wert der Steigung.

x	4	3	2,1	2,01
$f(x)=\frac{1}{2}x^3$	32	13,5	4,6305	4,0603005
m_{Sek}	$\frac{32-4}{4-2} = 14$	$\frac{13,5-4}{3-2} = 9,5$	$\frac{4,6305-4}{2,1-2} = 6,305$	$\frac{4,0603005-4}{2,01-2} = 6,03005$

x	0	1	1,9	1,99
$f(x)=\frac{1}{2}x^3$	0	0,5	3,4295	3,9402995
m_{Sek}	$\frac{0-4}{0-2} = 2$	$\frac{0,5-4}{1-2} = 3,5$	$\frac{3,4295-4}{1,9-2} = 5,705$	$\frac{3,9402995-4}{1,99-2} = 5,97005$

Differenzenquotient: $\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$

b) Wie lautet die Ableitung der Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^3$?

Lösung: $f'(x) = \frac{3}{2}x^2$

c) Welche Steigung hat die Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^3$ an der Stelle x = 2?

Lösung: $f'(2) = \frac{3}{2}\cdot 4 = 6$

8.) Differenzierbarkeit und Ableitungsregeln

Bestimmen Sie durch Ankreuzen jeweils die Ableitungsfunktion *f '* von den Funktionen *f*.

1 $f(x) = x^8$

☐ $f'(x) = x^7$	☐ $f'(x) = 8\,x^7$	☐ $f'(x) = x^9$	☐ $f'(x) = 7\,x^8$

2 $f(x) = x$

☐ $f'(x) = 0$	☐ $f'(x) = x$	☐ $f'(x) = x^2$	☐ $f'(x) = 1$

3 $f(x) = x^8 + x^2$

☐ $f'(x) = 8\,x^7 + x^2$	☐ $f'(x) = 7\,x^8 + 2\,x^2$	☐ $f'(x) = 8\,x^7 + 2\,x$	☐ $f'(x) = x^7 + x$

4 $f(x) = 0{,}1\,x^6$

☐ $f'(x) = 0{,}6\,x^5$	☐ $f'(x) = 6\,x^5$	☐ $f'(x) = 0{,}1\,x^5$	☐ $f'(x) = 0{,}6\,x^7$

5 $f(x) = \pi^2$

☐ $f'(x) = 2\,\pi$	☐ $f'(x) = \pi$	☐ $f'(x) = \pi\,x$	☐ $f'(x) = 0$

6 $f(x) = x^{11} - x^9 + x - 2$

☐ $f'(x) = 11\,x^{10} + x^9 + x - 2$	☐ $f'(x) = 11\,x^{10} - 9\,x^8 + x$
☐ $f'(x) = 11\,x^{10} - 9\,x^8 - 1$	☐ $f'(x) = 11\,x^{10} - 9\,x^8 + 1$

7 $f(x) = x^{n+1}$

☐ $f'(x) = n\,x^n$	☐ $f'(x) = (n+1)\,x^n$	☐ $f'(x) = (n-1)\,x^n$	☐ $f'(x) = (n+1)\,x^{n-1}$

8 $f(y) = x\,y^{4n}$

☐ $f'(y) = y^{4n}$	☐ $f'(y) = 4\,n\,y^{4n}$	☐ $f'(y) = 4\,n\,x\,y^{4n-1}$	☐ $f'(y) = 4\,n\,x\,y^{3n}$

9 $f(a) = 0{,}4\,a^{10}\,x^4$

☐ $f'(a) = 1{,}6\,a^{10}\,x^3$	☐ $f'(a) = 4\,a^9\,x^4$	☐ $f'(a) = 4\,a^9\,x^3$	☐ $f'(a) = 0{,}4\,a^9\,x^4$

10 $f(a) = y^2\,a^{5n}$

☐ $f'(a) = a^{5n}$	☐ $f'(a) = 2\,y\,a^{5n}$	☐ $f'(a) = 5\,n\,y^2\,a^{5n-1}$	☐ $f'(a) = 0$

11 $f(x) = a^3\,x^3$

☐ $f'(x) = 3\,a^2\,x^3$	☐ $f'(x) = 3\,a^3\,x^2$	☐ $f'(x) = 9\,a^2\,x^2$	☐ $f'(x) = 27\,a^2\,x^2$

12 $f(x) = x^3 + x$

☐ $f'(x) = 3\,x + x$	☐ $f'(x) = 3\,x^2 + 1$	☐ $f'(x) = 3\,x^2$	☐ $f'(x) = x^4$

Lösung:

1	$f(x) = x^8$			
☐	$f'(x) = x^7$	☐ $f'(x) = 8\,x^7$	☐ $f'(x) = x^9$	☐ $f'(x) = 7\,x^8$
2	$f(x) = x$			
☐	$f'(x) = 0$	☐ $f'(x) = x$	☐ $f'(x) = x^2$	☐ $f'(x) = 1$
3	$f(x) = x^8 + x^2$			
☐	$f'(x) = 8\,x^7 + x^2$	☐ $f'(x) = 7\,x^8 + 2\,x^2$	☐ $f'(x) = 8\,x^7 + 2\,x$	☐ $f'(x) = x^7 + x$
4	$f(x) = 0{,}1\,x^6$			
☐	$f'(x) = 0{,}6\,x^5$	☐ $f'(x) = 6\,x^5$	☐ $f'(x) = 0{,}1\,x^5$	☐ $f'(x) = 0{,}6\,x^7$
5	$f(x) = \pi^2$			
☐	$f'(x) = 2\,\pi$	☐ $f'(x) = \pi$	☐ $f'(x) = \pi\,x$	☐ $f'(x) = 0$
6	$f(x) = x^{11} - x^9 + x - 2$			
☐	$f'(x) = 11\,x^{10} + x^9 + x - 2$		☐ $f'(x) = 11\,x^{10} - 9\,x^8 + x$	
☐	$f'(x) = 11\,x^{10} - 9\,x^8 - 1$		☐ $f'(x) = 11\,x^{10} - 9\,x^8 + 1$	
7	$f(x) = x^{n+1}$			
☐	$f'(x) = n\,x^n$	☐ $f'(x) = (n+1)\,x^n$	☐ $f'(x) = (n-1)\,x^n$	☐ $f'(x) = (n+1)\,x^{n-1}$
8	$f(y) = x\,y^{4n}$			
☐	$f'(y) = y^{4n}$	☐ $f'(y) = 4\,n\,y^{4n}$	☐ $f'(y) = 4\,n\,x\,y^{4n-1}$	☐ $f'(y) = 4\,n\,x\,y^{3n}$
9	$f(a) = 0{,}4\,a^{10}\,x^4$			
☐	$f'(a) = 1{,}6\,a^{10}\,x^3$	☐ $f'(a) = 4\,a^9\,x^4$	☐ $f'(a) = 4\,a^9\,x^3$	☐ $f'(a) = 0{,}4\,a^9\,x^4$
10	$f(a) = y^2\,a^{5n}$			
☐	$f'(a) = a^{5n}$	☐ $f'(a) = 2\,y\,a^{5n}$	☐ $f'(a) = 5\,n\,y^2\,a^{5n-1}$	☐ $f'(a) = 0$
11	$f(x) = a^3\,x^3$			
☐	$f'(x) = 3\,a^2\,x^3$	☐ $f'(x) = 3\,a^3\,x^2$	☐ $f'(x) = 9\,a^2\,x^2$	☐ $f'(x) = 27\,a^2\,x^2$
12	$f(x) = x^3 + x$			
☐	$f'(x) = 3\,x + x$	☐ $f'(x) = 3\,x^2 + 1$	☐ $f'(x) = 3\,x^2$	☐ $f'(x) = x^4$