Musterlösung **12. Jgst.** **5. Test** **Datum: 25.03.2010**

Klasse: HBF OM 08 **Fach: Mathematik**

Thema: **Kurvenuntersuchung (ganz-/gebr.-rat.); Extremwertaufgaben; Abstandsberechnung**

1.) Kurvenuntersuchung gebr.-rat. Funktion

Untersuchen Sie die gebrochen-rationale Funktion f(x)

$$f(x) = \frac{4}{x^2 - 4x}$$

hinsichtlich folgender Kriterien:

a) Nullstellen und Polstellen

Lösung: *keine Nullstellen, da Zähler eine Konstante ist;*
Polstellen bei x = 0 und x = 4

b) Asymptote

Lösung: *a(x) = 0 ; Zählergrad < Nennergrad*

c) Zeigen Sie, dass die erste Ableitung der Funktion folgende Form annimmt:

$$f'(x) = \frac{-8(x-2)}{(x^2-4x)^2}$$

Lösung:

$$f(x) = \frac{4}{x^2-4x} \overset{Umformung}{=} 4(x^2-4x)^{-1}$$

Ableitung nach der Kettenregel:

$$f'(x) = (-1)\cdot 4(x^2-4x)^{-2}\cdot(2x-4) = \frac{-4\cdot(2x-4)}{(x^2-4x)^2} \overset{2\ ausklammern}{=} \frac{-8\cdot(x-2)}{(x^2-4x)^2}$$

d) Bestimmen Sie die Extremwerte der Funktion.

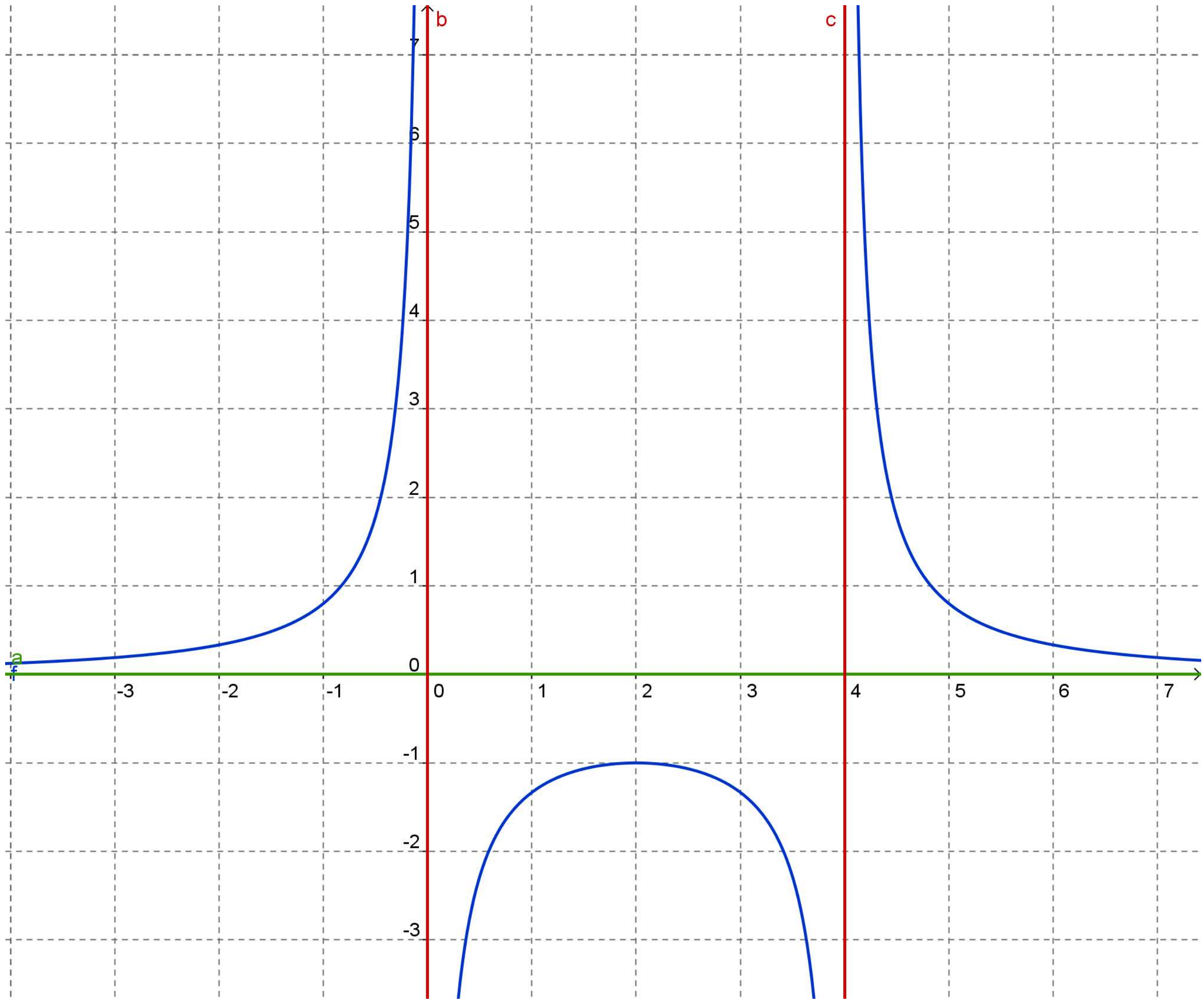
Anmerkung: Notwendige Bedingung genügt!

Lösung:

$$f'(x) = \frac{-8(x-2)}{(x^2-4x)^2} = 0 \xrightarrow{\cdot (x^2-4x)^2} -8(x-2) = 0 \rightarrow x = 2$$

$$f(2) = \frac{4}{2^2-4\cdot 2} = \frac{4}{4-8} = -1 \rightarrow Max(2 \mid -1)$$

Zur Ergänzung: Graph der Funktion



2.) Rekonstruktion von Funktionen

Eine Parabel 3. Grades berührt im Nullpunkt die *x*-Achse.

Die Tangente im Punkt P(–3/ 0) ist parallel zur Geraden *f*(*x*) = 6*x*.

Wie lautet die Funktion?

Lösung:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \qquad und \qquad f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

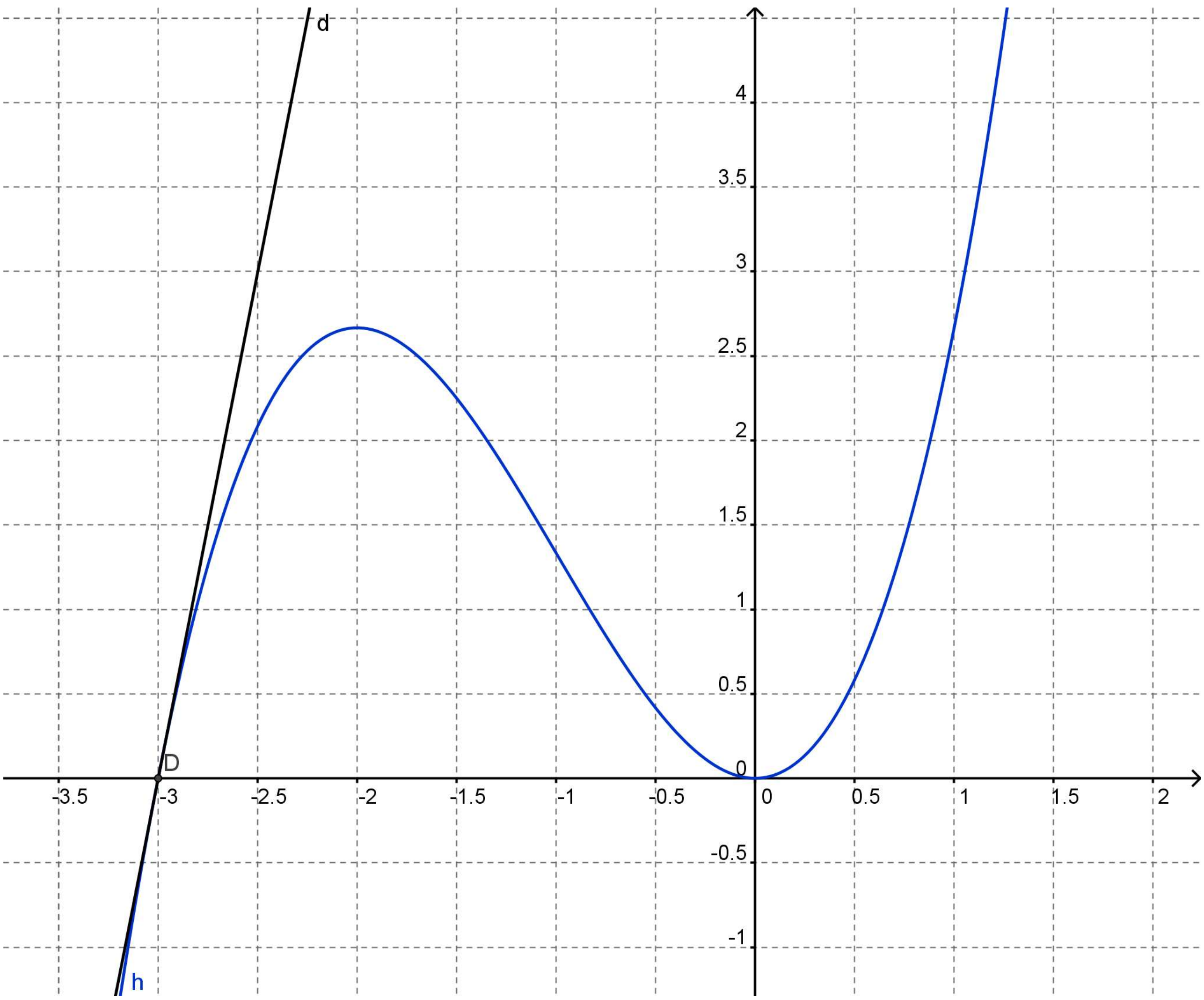
Ansätze:

$$I.) \quad f(0) = d = 0 \qquad II.) \quad f'(0) = c = 0$$

$$III.) \quad f(-3) = -27a + 9b = 0$$

$$IV.) \quad f'(-3) = 27a - 6b = 6$$

$$\xrightarrow{III.)+IV.)} \quad b = 2 \quad und \quad a = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{2}{3}x^3 + 2x^2$$



3.) Lösungsmenge für Parameter bestimmen

Beim Kugelstoßen beschreibt die Kugel annähernd eine Parabel.
Angenommen, diese Parabel kann durch die Funktion

$$f(x) = -\frac{1}{20}x^2 + \frac{9}{10}x$$

beschrieben werden.

a) In welcher Entfernung trifft die Kugel auf dem Boden auf?

Lösung

$$\text{Nullstellenberechnung:}$$

$$f(x) = -\frac{1}{20}x^2 + \frac{9}{10}x = 0 \xrightarrow{\text{Ausklammern}} x\left(-\frac{1}{20}x + \frac{9}{10}\right) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad und \quad x_2 = 18$$

b) Welche Neigung (Steigung) hat die Kugel beim Auftreffen?

Lösung:

$$\text{Ableitung bilden:} \quad f'(x) = -\frac{1}{10}x + \frac{9}{10}$$

$$f'(0) = \frac{9}{10} \quad und \quad f'(18) = -\frac{9}{10}$$

c) Wo befindet sich der höchste **Punkt** der Wurfbahn?
Ermitteln Sie auch die Höhe an dieser Stelle.

Lösung:

$$\text{Ableitung bilden:} \quad f'(x) = -\frac{1}{10}x + \frac{9}{10} = 0 \rightarrow x = 9$$

$$f''(x) = -\frac{1}{10} < 0 \rightarrow Max$$

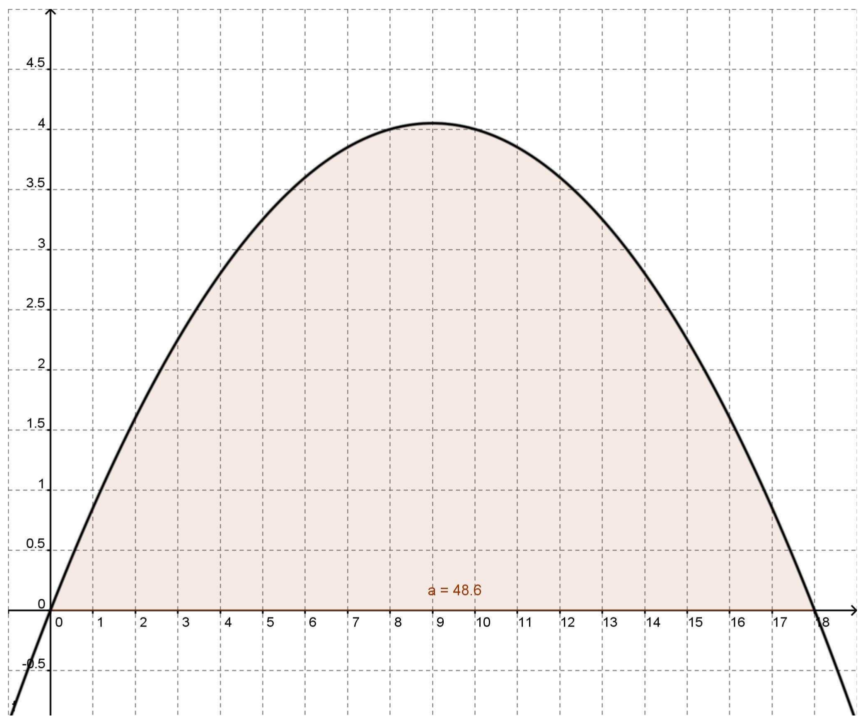
$$f(9) = -\frac{1}{20}\cdot 81 + \frac{9}{10}\cdot 9 = 4{,}05$$

Zusatzfrage: *Wie groß ist die Fläche, die von der Flugkurve mit dem Boden eingeschlossen wird?*

Lösung:

$$\int_0^{18} f(x)\,dx = \int_0^{18}\left(-\frac{1}{20}x^2 + \frac{9}{10}x\right)dx = \left[-\frac{1}{60}x^3 + \frac{9}{20}x^2\right]_0^{18}$$

$$\int_0^{18} f(x)\,dx = -97{,}2 + 145{,}8 - 0 = 48{,}6$$



4.) Extremwertaufgabe: Der Torbogen

In einen Torbogen soll eine rechteckige Einfahrt gemauert werden, deren Querschnittfläche möglichst groß ist.

Berechnen Sie die Breite und Höhe der Einfahrt.

Die Bogenlinie des Torbogens entspricht nahezu folgender Parabel:

$$f(x) \quad = \quad -\frac{1}{2}x^2+8$$

Lösung:

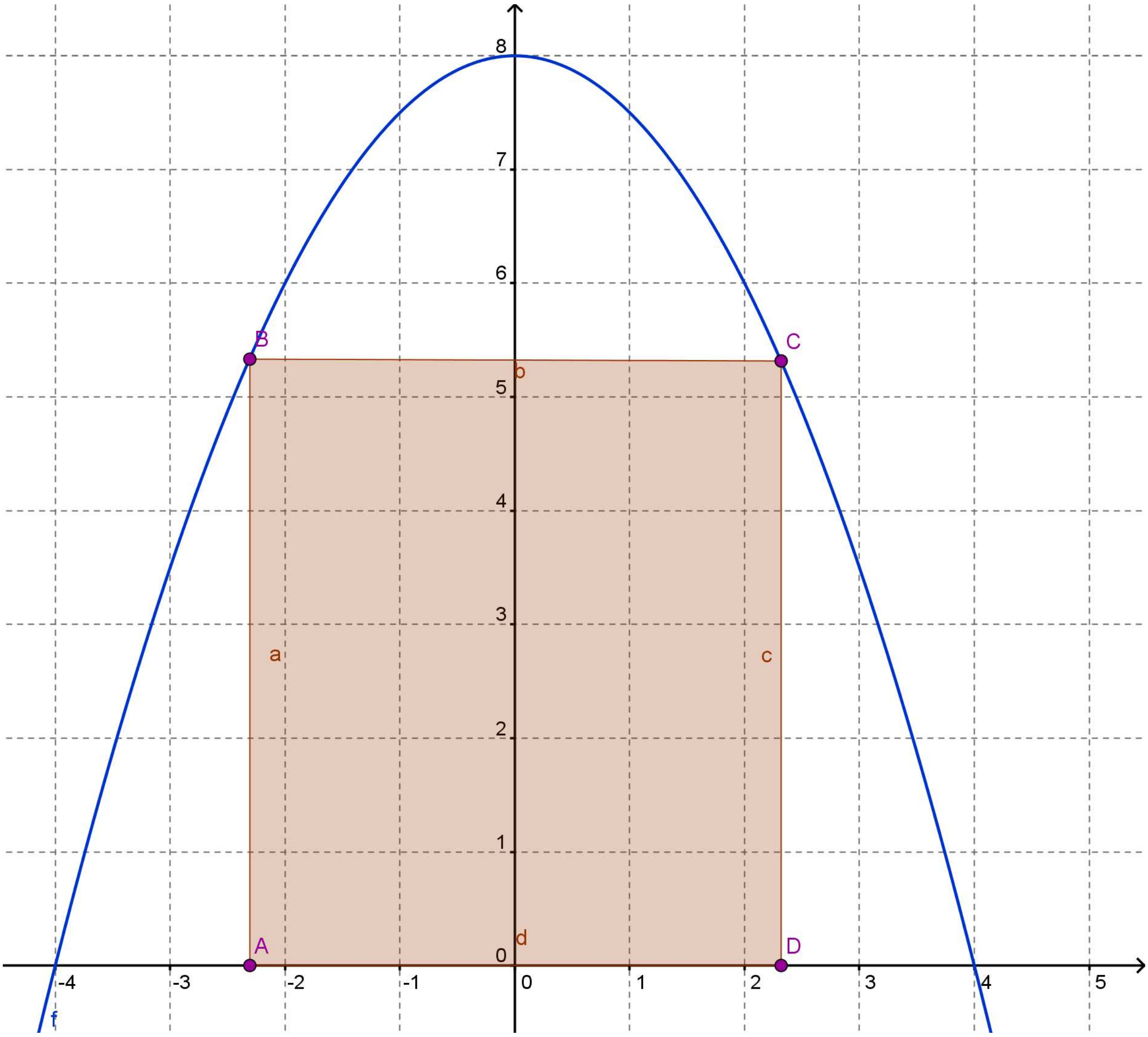
$$a(x) \quad = \quad 2x\cdot f(x) \quad = \quad 2x\cdot\left(-\frac{1}{2}x^2+8\right) \quad = \quad -x^3+16x$$

$$a'(x) \quad = \quad -3x^2+16 \quad = \quad 0 \quad \rightarrow \quad |x| \quad = \quad \sqrt{\frac{16}{3}} \quad \approx \quad 2{,}31$$

$$a''(x) \quad = \quad -6x \quad \xrightarrow{|x| \;=\; \sqrt{\frac{16}{3}}} \quad a''\left(\sqrt{\frac{16}{3}}\right) \quad = \quad -6\cdot\sqrt{\frac{16}{3}} \quad < \quad 0 \quad \rightarrow \quad Max$$

$$Breite: \quad 2\cdot\sqrt{\frac{16}{3}} \qquad Höhe: \quad f\left(\sqrt{\frac{16}{3}}\right) \quad = \quad -\frac{1}{2}\cdot\frac{16}{3}+8 \quad = \quad \frac{16}{3}$$

$$Fläche: \quad a\left(\sqrt{\frac{16}{3}}\right) \quad = \quad 2\cdot\sqrt{\frac{16}{3}}\cdot\frac{16}{3} \quad = \quad \frac{128}{9}\cdot\sqrt{3} \quad \approx \quad 24{,}63$$



8
7
6
5
4
3
2
1
0
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
A
B
C
D
a
b
c
d
f