Musterlösung **12. Jgst.** **5. Test** **Datum: 18.03.2010**
Klasse: HBF HE 08 **Fach: Mathematik**
Thema: Kurvenuntersuchung (ganz-/gebr.-rat.); Extremwertaufgaben; Abstandsberechnung

---

1.) Kurvenuntersuchung gebr.-rat. Funktion

Untersuchen Sie die gebrochen-rationale Funktion f(x)

$$f(x) = \frac{4}{x^2 - 4x}$$

hinsichtlich folgender Kriterien:

a) Nullstellen und Polstellen

Lösung: *keine Nullstellen, da Zähler eine Konstante ist;*
Polstellen bei x = 0 und x = 4

b) Asymptote

Lösung: *a(x) = 0 ; Zählergrad < Nennergrad*

c) Zeigen Sie, dass die erste Ableitung der Funktion folgende Form annimmt:

$$f'(x) = \frac{-8(x-2)}{(x^2-4x)^2}$$

Lösung:

$$f(x) = \frac{4}{x^2-4x} \overset{Umformung}{=} 4(x^2-4x)^{-1}$$

Ableitung nach der Kettenregel:

$$f'(x) = (-1)\cdot 4(x^2-4x)^{-2}\cdot(2x-4) = \frac{-4\cdot(2x-4)}{(x^2-4x)^2} \overset{2\ ausklammern}{=} \frac{-8\cdot(x-2)}{(x^2-4x)^2}$$

d) Bestimmen Sie die Extremwerte der Funktion.

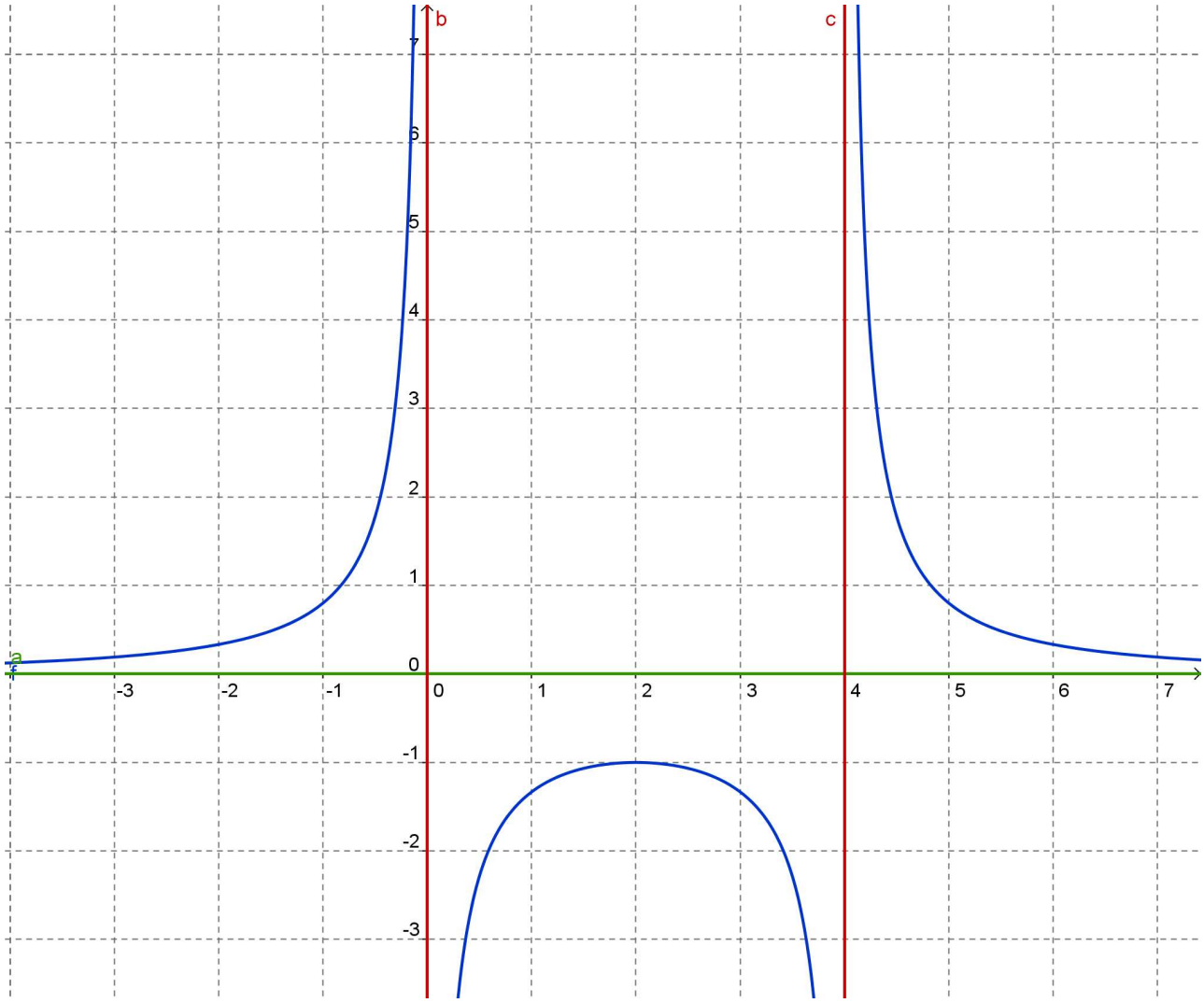
Anmerkung: Notwendige Bedingung genügt!

Lösung:

$$f'(x) = \frac{-8(x-2)}{(x^2-4x)^2} = 0 \quad \xrightarrow{\cdot(x^2-4x)^2} \quad -8(x-2) = 0 \quad \rightarrow \quad x = 2$$

$$f(2) = \frac{4}{2^2 - 4\cdot 2} = \frac{4}{4-8} = -1 \quad \rightarrow \quad Max(2 \mid -1)$$

e) Fertigen Sie ein Skizze der Funktion an.



2.) Rekonstruktion gebr.-rat. Funktionen

Bestimmen Sie a und b $\in \Re$ so, dass der Graph der Funktion f mit

$f(x)=\frac{a}{x^2-b}$ den Punkt P (1 / 1) hat und die Polstellen $|x|=2$ hat.

Lösung:

$$f(x) = \frac{a}{x^2-4} \quad mit\ b=4$$

$$Punkt\ einsetzen: \quad f(1) = \frac{a}{1^2-4}=1 \xrightarrow{berechnen} \frac{a}{-3}=1 \xrightarrow{\cdot(-3)} a=-3$$

$$Ergebnis: \quad f(x) = \frac{-3}{x^2-4}$$

3.) Lösungsmenge für Parameter bestimmen

Beim Kugelstoßen beschreibt die Kugel annähernd eine Parabel.

Angenommen, diese Parabel kann durch die Funktion

$$f(x) = -\frac{1}{20}x^2 + \frac{9}{10}x$$

beschrieben werden.

a) In welcher Entfernung trifft die Kugel auf dem Boden auf?

Lösung

Nullstellenberechnung:

$$f(x) = -\frac{1}{20}x^2 + \frac{9}{10}x = 0 \xrightarrow{Ausklammern} x\left(-\frac{1}{20}x + \frac{9}{10}\right) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad und \quad x_2 = 18$$

b) Welche Neigung (Steigung) hat die Kugel beim Auftreffen?

Lösung:

$$Ableitung\ bilden: \quad f'(x) = -\frac{1}{10}x + \frac{9}{10}$$

$$f'(0) = \frac{9}{10} \quad und \quad f'(18) = -\frac{9}{10}$$

c) Wo befindet sich der höchste **Punkt** der Wurfbahn?

Ermitteln Sie auch die Höhe an dieser Stelle.

Lösung:

$$Ableitung\ bilden: \quad f'(x) = -\frac{1}{10}x + \frac{9}{10} = 0 \rightarrow x = 9$$

$$f''(x) = -\frac{1}{10} < 0 \rightarrow Max$$

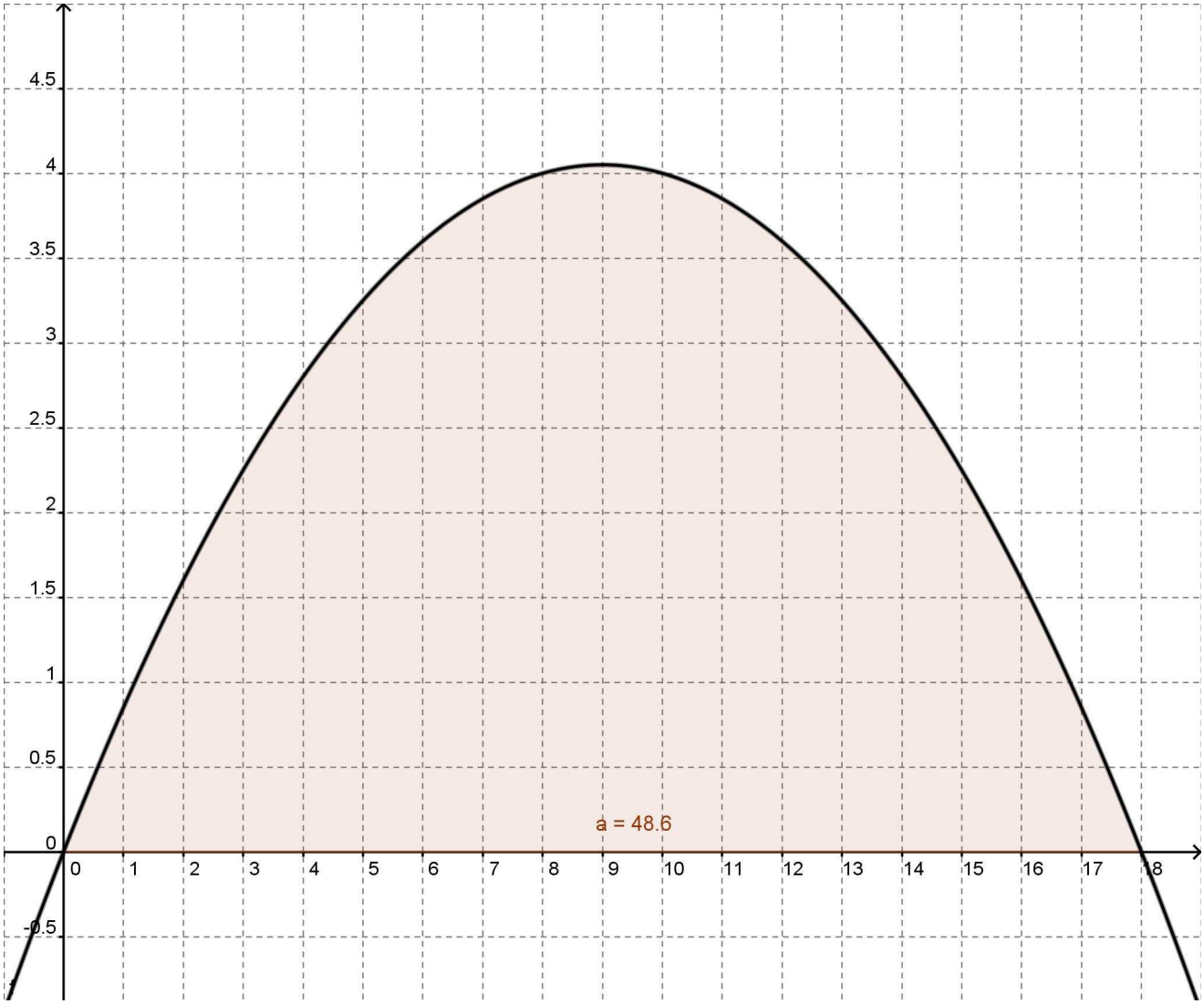
$$f(9) = -\frac{1}{20}\cdot 81 + \frac{9}{10}\cdot 9 = 4{,}05$$

Zusatzfrage: *Wie groß ist die Fläche, die von der Flugkurve mit dem Boden eingeschlossen wird?*

Lösung:

$$\int_0^{18} f(x)\,dx = \int_0^{18}\left(-\frac{1}{20}x^2+\frac{9}{10}x\right)dx = \left[-\frac{1}{60}x^3+\frac{9}{20}x^2\right]_0^{18}$$

$$\int_0^{18} f(x)\,dx = -97,2+145,8-0 = 48,6$$



4.) Extremwertaufgabe: Der Torbogen

In einen Torbogen soll eine rechteckige Einfahrt gemauert werden, deren Querschnittfläche möglichst groß ist.

Berechnen Sie die Breite und Höhe der Einfahrt.

Die Bogenlinie des Torbogens entspricht nahezu folgender Parabel:

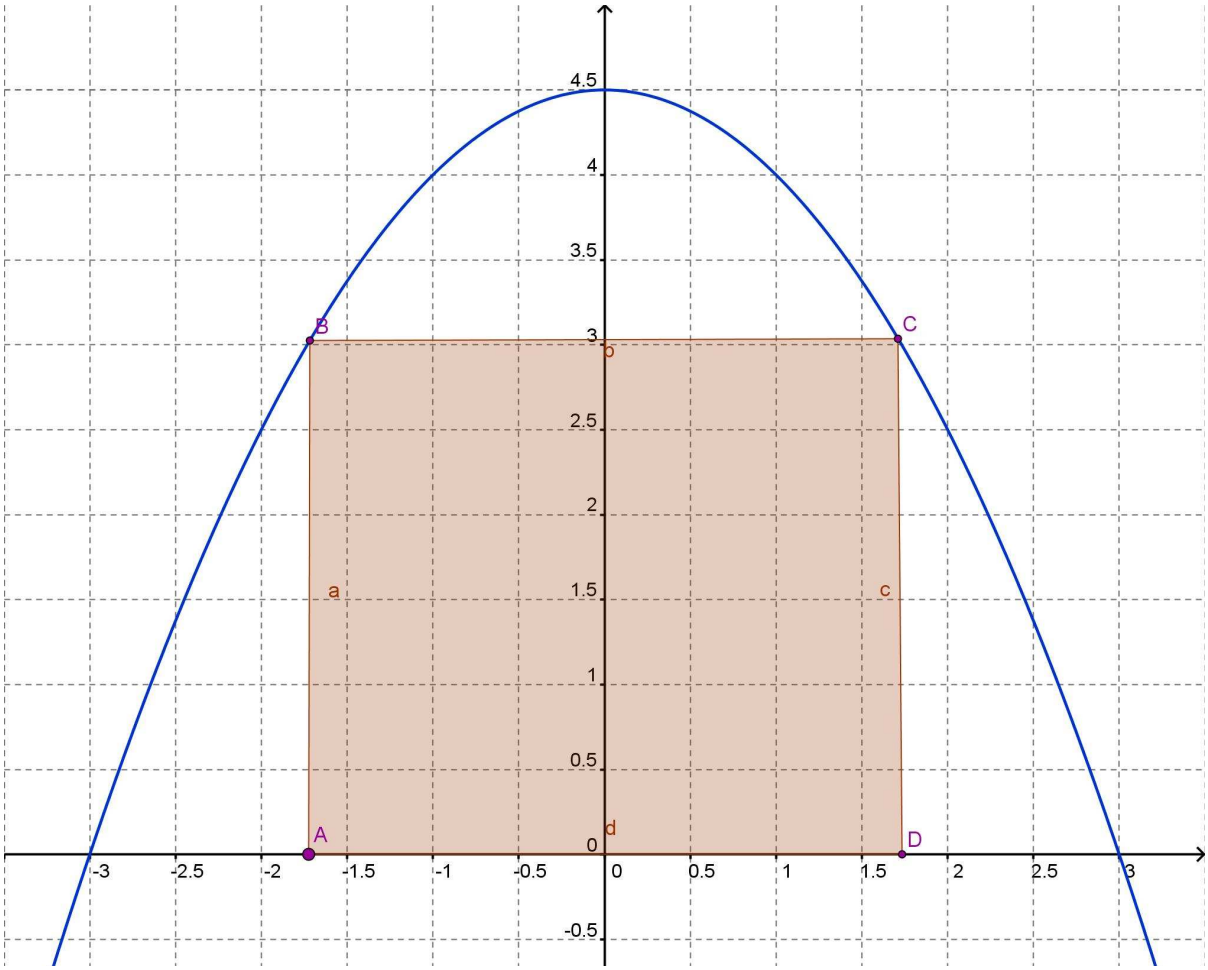
$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{9}{2}$$

Lösung:

$$a(x) = 2x \cdot f(x) = 2x \cdot \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{9}{2}\right) = -x^3 + 9x$$

$$a'(x) = -3x^2 + 9 = 0 \rightarrow |x| = \sqrt{3}$$

$$a''(x) = -6x \xrightarrow{|x| = \sqrt{3}} a''(\sqrt{3}) = -6 \cdot \sqrt{3} < 0 \rightarrow Max$$

$$Breite: \; 2 \cdot \sqrt{3} \qquad Höhe: \; f(\sqrt{3}) = -\frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{9}{2} = 3$$

$$Fläche: \; a(\sqrt{3}) = 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 3 = 6 \cdot \sqrt{3} \approx 10{,}39$$