Musterlösung **12. Jgst.** **3. Klassenarbeit** **Datum: 19.04.2010**

Klasse: HBF HE/OM 08 **Fach: Mathematik**

Thema: Kurvendiskussion; Extremwertaufgaben; Rekonstruktion; Integral

---

1.) Kurvenuntersuchung gebr.-rat. Funktion

Untersuchen Sie die gebrochen-rationale Funktion f(x)

$$f(x) = \frac{x^2-2x+1}{2x-4}$$

hinsichtlich folgender Kriterien:

a) Nullstellen und Polstellen

Lösung: Nullstellen: x = 1 Polstelle: x = 2

b) Asymptote

Lösung: a(x) = $\frac{1}{2}$ x

c) Zeigen Sie, dass die erste Ableitung der Funktion folgende Form annimmt:

$$f'(x) = \frac{x^2-4x+3}{2(x-2)^2}$$

Lösung:

$$f'(x) = \frac{(2x-2)(2x-4)-(x^2-2x+1)\cdot 2}{(2x-4)^2} = \frac{4x^2-12x+8-2x^2+4x-2}{4(x-2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2-8x+6}{4(x-2)^2} = \frac{x^2-4x+3}{2(x-2)^2}$$

d) Bestimmen Sie die Extremwerte der Funktion.

Anmerkung: Notwendige Bedingung genügt!

Lösung:

$$f'(x)=\frac{x^2-4x+3}{2(x-2)^2} = 0 \rightarrow x^2-4x+3 = 0 \rightarrow x_1 = 1 \; und \; x_2 = 3$$

$$\rightarrow f(1) = 0 \rightarrow Max(1 \mid 0)$$

$$\rightarrow f(3) = \frac{9-6+1}{6-4} = 2 \rightarrow Min(3 \mid 2)$$

e) Warum kann es sein, dass der Funktionswert des Minimums größer ist als der Funktionswert des Maximums?

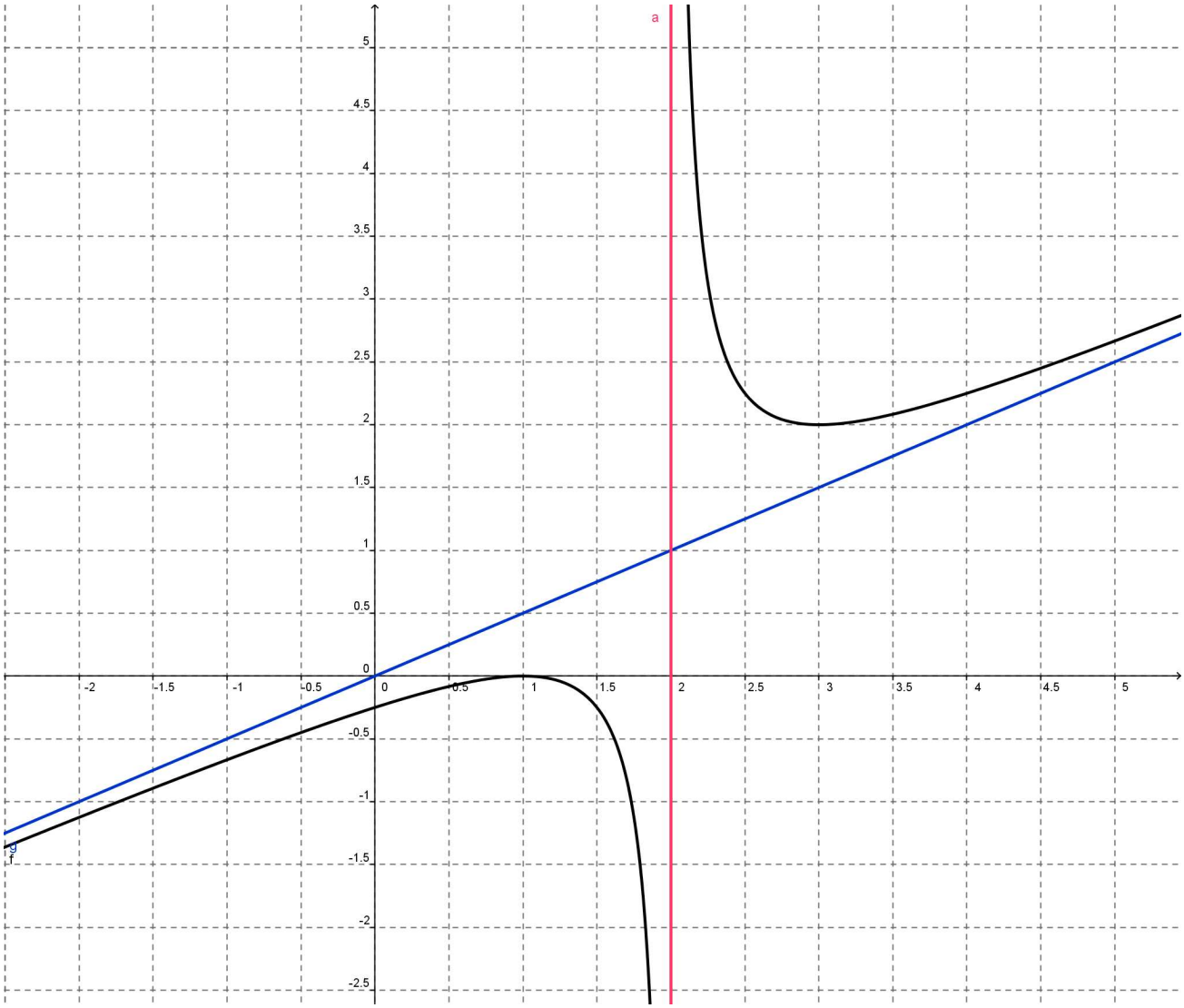
Ist das nicht ein Widerspruch?

Lösung: Dies kann bei gebr.-rat. Funktionen wie in diesem Beispiel zutreffen. Durch die Polsenkrechte und die Asymptote wird die Funktion getrennt, somit entstehen zwei Teilfunktionen; diese können unabhängig voneinander unterschiedliche Extremwerte haben, so dass der o.a. Fall eintritt.

f) Zeigen Sie, dass sich die Asymptote und Polsenkrechte im

Punkt P(2 / 1) schneiden.

Lösung: $a(2) = \frac{1}{2} * 2 = 1$



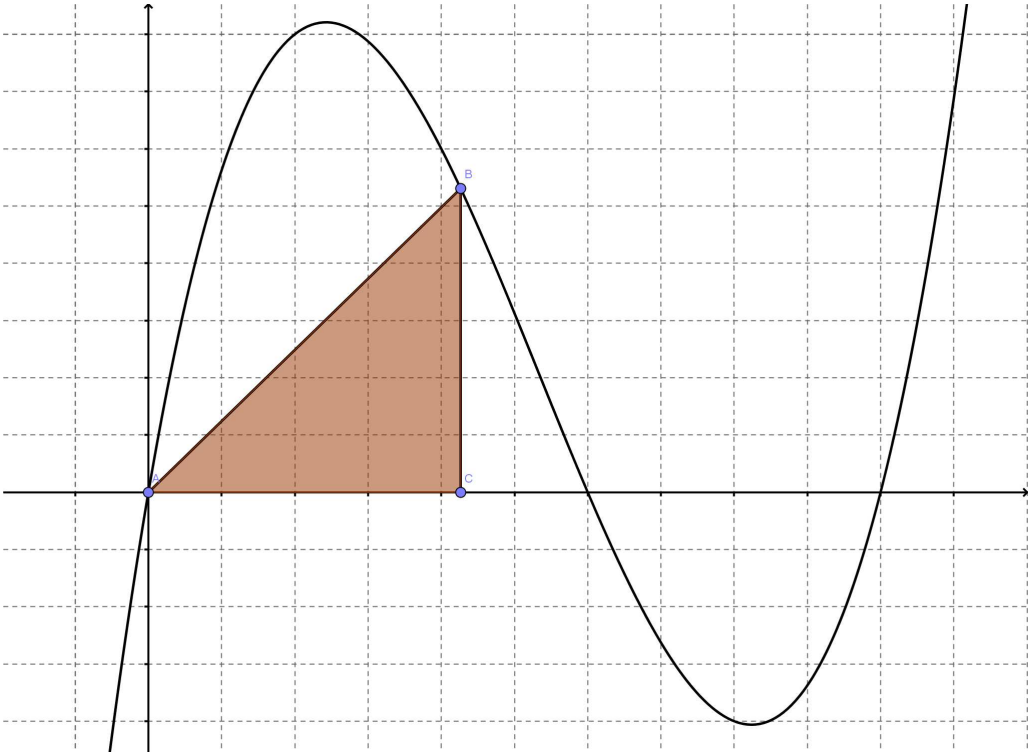
2.) Extremwertaufgabe - Geometrie: Das Dreieck

In die von dem Graphen von $f(x)$ und der x-Achse eingeschlossenen Fläche soll ein möglichst großes Dreieck einbeschrieben werden.

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 4x^2 + 15x$$

a) Die untere Seite des Dreiecks liegt auf der x-Achse vom Ursprung bis zum Punkt C, die rechte Seite ist eine Senkrechte zur x-Achse von C bis zum Punkt B auf dem Graphen, die linke Seite verbindet den Ursprung mit dem Punkt B. Bestimmen Sie die Länge der Grundseite, die Höhe und die Fläche des Dreiecks.

Skizze:



Lösung:

$$a(x) = \frac{1}{2}x \cdot f(x) = \frac{1}{2}x \cdot \left(\frac{1}{4}x^3 - 4x^2 + 15x\right) = \frac{1}{8}x^4 - 2x^3 + \frac{15}{2}x^2$$

$$a'(x) = \frac{1}{2}x^3 - 6x^2 + 15x = 0 \rightarrow x_1 = 0 \quad und \quad x_{2/3} = 6 \pm \sqrt{6}$$

$$a''(x) = \frac{3}{2}x^2 - 12x + 15 \xrightarrow{x = 6-\sqrt{6}} a''(3{,}55) = -8{,}697 < 0 \rightarrow Max$$

$$Länge: \; 6 - \sqrt{6} \approx 3{,}55 \qquad Höhe: \; f\left(6-\sqrt{6}\right) = 14{,}02$$

$$Fläche: \; a\left(6-\sqrt{6}\right) = 2 \cdot 3{,}55 \cdot 14{,}02 \approx 24{,}89$$

b) Berechnen Sie die Nullstellen, Extremwerte und Wendepunkte der Funktion.

Lösung:

Nullstellen:

$$f(x) = x\left(\frac{1}{4}x^2 - 4x + 15\right) \rightarrow x_1 = 0 \quad und \quad x_2 = 6 \quad und \quad x_3 = 10$$

Extremwerte:

$$f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 8x + 15 = 0 \rightarrow x_1 = 2,43 \quad und \quad x_2 = 8,24$$

$$f''(x) = \frac{3}{2}x - 8 \rightarrow Max(2,43 \mid 16,42) \quad und \quad Min(8,24 \mid -8,12)$$

Wendepunkte:

$$f''(x) = \frac{3}{2}x - 8 = 0 \rightarrow x = \frac{16}{3}$$

$$f'''(x) = \frac{3}{2} \rightarrow W\left(\frac{16}{3} \mid 4,15\right)$$

c) Zeigen Sie, dass die beiden Extremwerte und der Wendepunkt auf einer Geraden liegen und geben Sie die Geradengleichung an.

Lösung:

Geradengleichung zwischen den beiden Extremwerten lautet:

$$g(x) = -4\frac{2}{9}x + 26\frac{2}{3} = -\frac{38}{9}x + \frac{80}{3}$$

Punktprobe mit Wendepunkt: $g\left(\frac{16}{3}\right) = -\frac{38}{9} \cdot \frac{16}{3} + \frac{80}{3} = 4,15$

d) Welche Fläche schließt die Funktion mit der x-Achse ein?

Lösung:

$$A = \int_0^6 \left(\frac{1}{4}x^3 - 4x^2 + 15x\right) dx + \left|\int_6^{10} \left(\frac{1}{4}x^3 - 4x^2 + 15x\right) dx\right|$$

$$A = \left[\frac{1}{16}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{15}{2}x^2\right]_0^6 + \left|\left[\frac{1}{16}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{15}{2}x^2\right]_6^{10}\right|$$

$$A = 63 + 21\frac{1}{3} = 84\frac{1}{3}$$

3.) Extremwertaufgabe

Der Ausdruck 2x + 5y zweier Zahlen beträgt 300.

Bestimmen Sie die beiden Zahlen, so dass deren Produkt maximal wird.

Lösung

$$Zielfunktion: \quad f(x,y) = x \cdot y$$

$$Nebenbedingung: \quad 2x + 5y = 300 \xrightarrow{aufgelöst} y = 60 - \frac{2}{5}x$$

$$f(x,y) = x \cdot y \xrightarrow{NB\ eingesetzt} f(x) = x \cdot \left(60 - \frac{2}{5}x\right) = 60x - \frac{2}{5}x^2$$

$$f'(x) = 60 - \frac{4}{5}x = 0 \rightarrow x = 75 \rightarrow y = 30$$

$$f''(x) = -\frac{4}{5} < 0 \Rightarrow Max(75 \mid 30 \mid 2.250)$$

4.) Lösungsmenge für Parameter bestimmen

Beim Kugelstoßen beschreibt die Kugel annähernd eine Parabel.

Angenommen, diese Parabel kann durch die Funktion

$$f(x) = -\frac{1}{30}x^2 + \frac{2}{3}x$$

beschrieben werden.

a) In welcher Entfernung trifft die Kugel auf dem Boden auf?

Lösung

Nullstellenberechnung :

$$f(x) = -\frac{1}{30}x^2 + \frac{2}{3}x = 0 \xrightarrow{\text{Ausklammern}} x\left(-\frac{1}{30}x + \frac{2}{3}\right) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad und \quad x_2 = 20$$

b) Welche Neigung (Steigung) hat die Kugel beim Auftreffen?

Lösung:

$$\text{Ableitung bilden}: \quad f'(x) = -\frac{1}{15}x + \frac{2}{3}$$

$$f'(0) = \frac{2}{3} \quad und \quad f'(20) = -\frac{2}{3}$$

c) Wo befindet sich der höchste **Punkt** der Wurfbahn?

Ermitteln Sie auch die Höhe an dieser Stelle.

Lösung:

$$\text{Ableitung bilden}: \quad f'(x) = -\frac{1}{15}x + \frac{2}{3} = 0 \rightarrow x = 10$$

$$f''(x) = -\frac{1}{15} < 0 \rightarrow Max$$

$$f(10) = -\frac{1}{30}\cdot 100 + \frac{2}{3}\cdot 10 = \frac{10}{3}$$

d) Bestimmen Sie den Wert des Parameters k, damit die Kugel bereits nach 15 Metern aufkommt.

$$f_k(x) = -\frac{1}{30}x^2 + \frac{2}{3}kx$$

Lösung

$$f_k(15) = -\frac{1}{30}\cdot 15^2 + \frac{2}{3}k\cdot 15 = 0 \Rightarrow -7{,}5+10k = 0 \Rightarrow k = 0{,}75$$

5.) Rekonstruktion von Funktionen I

Das Schaubild einer ganzrationalen Funktion dritten Grades

berührt die x-Achse im Ursprung.

Der Punkt H(1|1) ist der Hochpunkt des Schaubilds.

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung.

Lösung:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \qquad und \qquad f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

Ansätze:

$$I.)\quad f(0) = d = 0 \qquad II.)\quad f'(0) = c = 0$$

$$III.)\quad f(1) = a + b = 1$$

$$IV.)\quad f'(1) = 3a + 2b = 0$$

$$\xrightarrow{2\cdot III.)-IV.)} \quad a = -2 \quad und \quad b = 3 \quad \Rightarrow \quad f(x) = -2x^3 + 3x^2$$

6.) Rekonstruktion von Funktionen II

Gesucht ist eine ganz-rationale Funktion 3. Grades, deren Graph die Gerade

$$g(x) = x+1$$

bei **x = - 1** schneidet und im Wendepunkt $W(1 \mid f(1))$ die Tangente $t(x) = -3x+5$ hat.

Bestimmen Sie nur die notwendigen Ansätze.

Lösung:

$$f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$$

$$f'(x) = 3ax^2+2bx+c \qquad und \qquad f''(x) = 6ax+2b$$

Ansätze:

$$I.)\quad f(-1) = -a+b-c+d = 0$$

$$II.)\quad f(1) = a+b+c+d = 2$$

$$III.)\quad f'(1) = 3a+2b+c = -3$$

$$IV.)\quad f''(1) = 6a+2b = 0$$