

1.) Ableitungen

Bilden Sie die 1. Ableitung zu folgenden Funktionen:

$$\text{a) } f_t(x) = (x^2 + 3tx - 4)^{10}$$

$$\text{Lösung: } f_t'(x) = 10(x^2 + 3tx - 4)^9 (2x + 3t)$$

$$\text{b) } f_t(x) = \frac{3x^2 + xt}{x + 2}$$

Lösung:

$$f_t'(x) = \frac{(6x + t)(x + 2) - (3x^2 + xt) \cdot 1}{(x + 2)^2}$$

$$f_t'(x) = \frac{6x^2 + 12x + tx + 2t - 3x^2 - xt}{(x + 2)^2} = \frac{3x^2 + 12x + 2t}{(x + 2)^2}$$

$$\text{c) } f(x) = \left(\frac{1}{2}x^4 - 2x^3\right)(2x - 1)$$

Lösung:

$$f'(x) = (2x^3 - 6x^2)(2x - 1) + \left(\frac{1}{2}x^4 - 2x^3\right) \cdot 2$$

$$f'(x) = 4x^4 - 2x^3 - 12x^3 + 6x^2 + x^4 - 4x^3 = 5x^4 - 18x^3 + 6x^2$$

2.) Newton-Iteration

Berechnen Sie die Nullstelle für $x > 0$ bei dieser Funktion mittels zweier Iterationen:

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^3 - x^2 + 4x + 1$$

Lösung:

n	x_{n+1}	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_n - f(x_n)/f'(x_n)$
0	2	1	-6	2.16666
1	2.16666	-0.11342592	-7.375	2.15128
2	2.151286	-0.001003466	-7.2446266	2.15114836

3.) Kapitalwertmethode und interner Zinsfuß

Gegeben sei folgende Zahlungsreihe:

Jahr 0	Jahr 1	Jahr 2	Jahr 3	Jahr 4
- 15.000,00	5.000,00	5.000,00	4.000,00	4.000,00

- a) Bestimmen Sie den Kapitalwert dieser Zahlungsreihe bei einem Zinssatz von 6 %.

Lösung:

$$C_0 = -15.000 + \frac{5.000}{1,06} + \frac{5.000}{1,06^2} + \frac{4.000}{1,06^3} + \frac{4.000}{1,06^4}$$

$$C_0 = -15.000 + 4.716,98 + 4.449,98 + 3.358,48 + 3.168,37$$

$$C_0 = 693,81$$

- b) Berechnen Sie den internen Zinsfuß dieser Investition mittels einer Näherung und dem Startzinssatz 10 %.

Lösung:

$$0 = -15.000 + \frac{5.000}{q} + \frac{5.000}{q^2} + \frac{4.000}{q^3} + \frac{4.000}{q^4}$$

$$0 = -15.000 \cdot q^4 + 5.000 \cdot q^3 + 5.000 \cdot q^2 + 4.000 \cdot q + 4.000$$

Newton – Iteration :

n	x_{n+1}	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_n - f(x_n)/f'(x_n)$
0	1.1	-856.5	-46710	1.081663
1	1.0816634	-29.012017	-43565.931964	1.080997
2	1.0809975	-0.03726670	-43454.035341	1.080996

4.) Extremwertaufgabe I

Der Ausdruck $4x + 2y$ zweier Zahlen beträgt 250.

Bestimmen Sie die beiden Zahlen, so dass deren Produkt maximal wird.

Lösung:

$$\text{Zielfunktion: } f(x, y) = x \cdot y$$

$$\text{Nebenbedingung: } 250 = 4x + 2y \Rightarrow y = 125 - 2x$$

$$\xrightarrow{y = 125 - 2x} f(x) = x \cdot (125 - 2x) = -2x^2 + 125x$$

$$\Rightarrow f'(x) = -4x + 125 = 0 \Rightarrow x = 31,25$$

$$\Rightarrow f''(x) = -4 < 0 \Rightarrow \text{Max} \Rightarrow y = 62,5$$

$$\Rightarrow f(x, y) = 1.953,125$$

5.) Extremwertaufgabe II

Eine Dose (Zylinderform) hat ein Volumen von 5 Litern

Der Materialverbrauch zur Herstellung der Dose soll möglichst gering gehalten werden.

Wie müssen die Abmessungen (Radius und Höhe) gewählt werden?

Bitte benennen Sie auch die Maßeinheiten.

Lösung:

$$\text{Zielfunktion: } O(r, h) = 2r^2\pi + 2r\pi h$$

$$\text{Nebenbedingung: } 5 = r^2\pi h \Rightarrow h = \frac{5}{r^2\pi}$$

$$\xrightarrow{h = \frac{5}{r^2\pi}} O(r) = 2r^2\pi + 2r\pi \cdot \frac{5}{r^2\pi} = 2r^2\pi + \frac{10}{r}$$

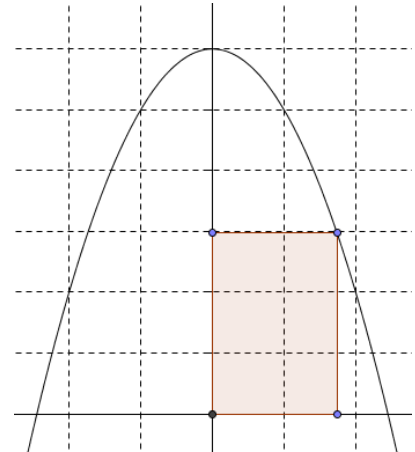
$$\Rightarrow O'(r) = 4r\pi - \frac{10}{r^2} = 0 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{5}{2\pi}} \approx 0,92668$$

$$\Rightarrow O''(r) = 4\pi + \frac{20}{r^3} > 0 \Rightarrow \text{Min} \Rightarrow h = \frac{5}{0,92668^2\pi} = 1,85336$$

Die Maßeinheit muss **dm** lauten.

6.) Extremwertaufgabe III

Der Eckpunkt $P(x/y)$ eines achsenparallelen Rechtecks liegt auf der Parabel $f(x) = 6 - x^2$.



a) Wie muss x gewählt werden, damit die Fläche des Rechtecks maximal wird?

b) Wie muss x gewählt werden, damit der Umfang des Rechtecks ein Maximum darstellt?

c) Sei nun die Funktion $f_k(x) = k - x^2$ gegeben.

Zeigen Sie, dass allgemein für $x = \sqrt{\frac{k}{3}}$ die Fläche maximal wird.

Lösung: zu a)

Zielfunktion: $f(x, y) = x \cdot y$ und Nebenbedingung: $y = 6 - x^2$

$$\xrightarrow{y = 6 - x^2} f(x) = x \cdot (6 - x^2) = -x^3 + 6x$$

$$\Rightarrow f'(x) = -3x^2 + 6 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \pm \sqrt{2} \quad (\text{nur positive Lösung relevant!})$$

$$\Rightarrow f''(x) = -6x \Rightarrow f''(\sqrt{2}) = -6 \cdot \sqrt{2} < 0 \Rightarrow \text{Max} \Rightarrow y = 4$$

$$\Rightarrow f(x, y) = 4 \cdot \sqrt{2}$$

Lösung: zu b)

Zielfunktion: $f(x, y) = 2(x + y)$ und Nebenbedingung: $y = 6 - x^2$

$$\xrightarrow{y = 6 - x^2} f(x) = 2x + 2 \cdot (6 - x^2) = -2x^2 + 2x + 12$$

$$\Rightarrow f'(x) = -4x + 2 = 0 \Rightarrow x = 0,5$$

$$\Rightarrow f''(x) = -4 < 0 \Rightarrow \text{Max} \Rightarrow y = 5,75$$

$$\Rightarrow f(x, y) = 2 \cdot (0,5 + 5,75) = 12,5$$

Lösung: zu c)

Zielfunktion: $f(x, y) = x \cdot y$ und Nebenbedingung: $y = k - x^2$

$$\xrightarrow{y = k - x^2} f(x) = x \cdot (k - x^2) = -x^3 + kx$$

$$\Rightarrow f'(x) = -3x^2 + k = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \pm \sqrt{\frac{k}{3}} \quad (\text{nur positive Lösung relevant!})$$

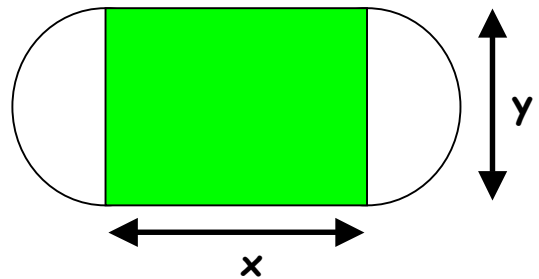
$$\Rightarrow f''(x) = -6x \Rightarrow f''\left(\sqrt{\frac{k}{3}}\right) = -6 \cdot \sqrt{\frac{k}{3}} < 0 \Rightarrow \text{Max} \Rightarrow y = \frac{2}{3}k$$

$$\Rightarrow f(x, y) = \sqrt{\frac{k}{3}} \cdot \frac{2}{3}k = \frac{2}{9}k \cdot \sqrt{3k}$$

7.) Extremwertaufgabe IV

Die Laufbahn eines Leichtathletikstadions hat einen Umfang von 400 m.

Welche Maße muss der Innenraum des rechteckigen Rasens erhalten, wenn seine Fläche maximal werden soll?



Lösung:

Zielfunktion: $f(x, y) = x \cdot y$

Nebenbedingung:

$$400 = 2x + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}y\right) \cdot \pi \Rightarrow 400 = 2x + y\pi \Rightarrow y = \frac{400}{\pi} - \frac{2x}{\pi}$$

$$\xrightarrow{y = \frac{400}{\pi} - \frac{2x}{\pi}} f(x) = x \cdot \left(\frac{400}{\pi} - \frac{2x}{\pi}\right) = \frac{400x}{\pi} - \frac{2x^2}{\pi}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{400}{\pi} - \frac{4x}{\pi} = 0 \Rightarrow x = 100$$

$$\Rightarrow f''(x) = -\frac{4}{\pi} < 0 \Rightarrow \text{Max} \Rightarrow y = \frac{200}{\pi}$$

$$\Rightarrow f(x, y) = 100 \cdot \frac{200}{\pi} = \frac{20.000}{\pi}$$