Musterlösung **12. Jgst. 1. Klassenarbeit** **Datum: 29.10.2009**

Klasse: HBF **Fach: Mathematik**

Thema: Kurvendiskussion ganzrat. Funktionen; Rekonstruktion von Fkt.; Ableitungsregeln

---

1.) Ableitungen

Bilden Sie die 1. Ableitung zu folgenden Funktionen:

a) $f(x) = 2x^4 - x^2 + 3$ ***Lösung:*** $f'(x) = 8x^3 - 2x$

b) $f_t(x) = t^4x^2 - tx$ ***Lösung:*** $f_t'(x) = 2t^4x - t$

c) $f(x) = (2x^2 - 1)(x - 3)$

Lösung: $f'(x) = 4x(x-3) + (2x^2 - 1)$

d) $f_t(x) = (4x^3 + tx - 2)^5$

Lösung: $f_t'(x) = 5(4x^3 + tx - 2)^4 (12x^2 + t)$

e) $f(x) = (x^3 - 2x) \cdot \left(\frac{1}{2}x^2 - 3x\right)^2$

Lösung: $f'(x) = (3x^2 - 2) \cdot \left(\frac{1}{2}x^2 - 3x\right)^2 + 2(x^3 - 2x) \cdot \left(\frac{1}{2}x^2 - 3x\right)(x - 3)$

f) $f(x) = \sqrt{3x^{n+1} - x^n}$

Lösung: $f'(x) = \frac{3(n+1)x^n - nx^{n-1}}{2\sqrt{3x^{n+1} - x^n}}$

g) $f(x) = x^2 \cdot g(x)$

Lösung: $f'(x) = 2x \cdot g(x) + x^2 \cdot g'(x)$

h) $f(x) = g'(x)\cdot k(x)+k(x)\cdot g'(x)$

Lösung:

$$f'(x) = g''(x)\cdot k(x)+g'(x)\cdot k'(x)+k'(x)\cdot g'(x)+k(x)\cdot g''(x)$$
$$f'(x) = 2g''(x)\cdot k(x)+2g'(x)\cdot k'(x)$$

oder

$$f(x) = 2g'(x)\cdot k(x) \Rightarrow f'(x) = 2g''(x)\cdot k(x)+2g'(x)\cdot k'(x)$$

2.) Untersuchung einer ganzrationalen Funktion

Gegeben sei folgende Funktion: $f(x) = \frac{2}{3}x^3-2x^2$

Untersuchen Sie die Funktion nach folgenden Kriterien:

a) Nullstellen

Lösung: $f(x) = x^2\left(\frac{2}{3}x-2\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \;\; und \;\; x_2 = 3$

b) Extremwerte

Lösung:

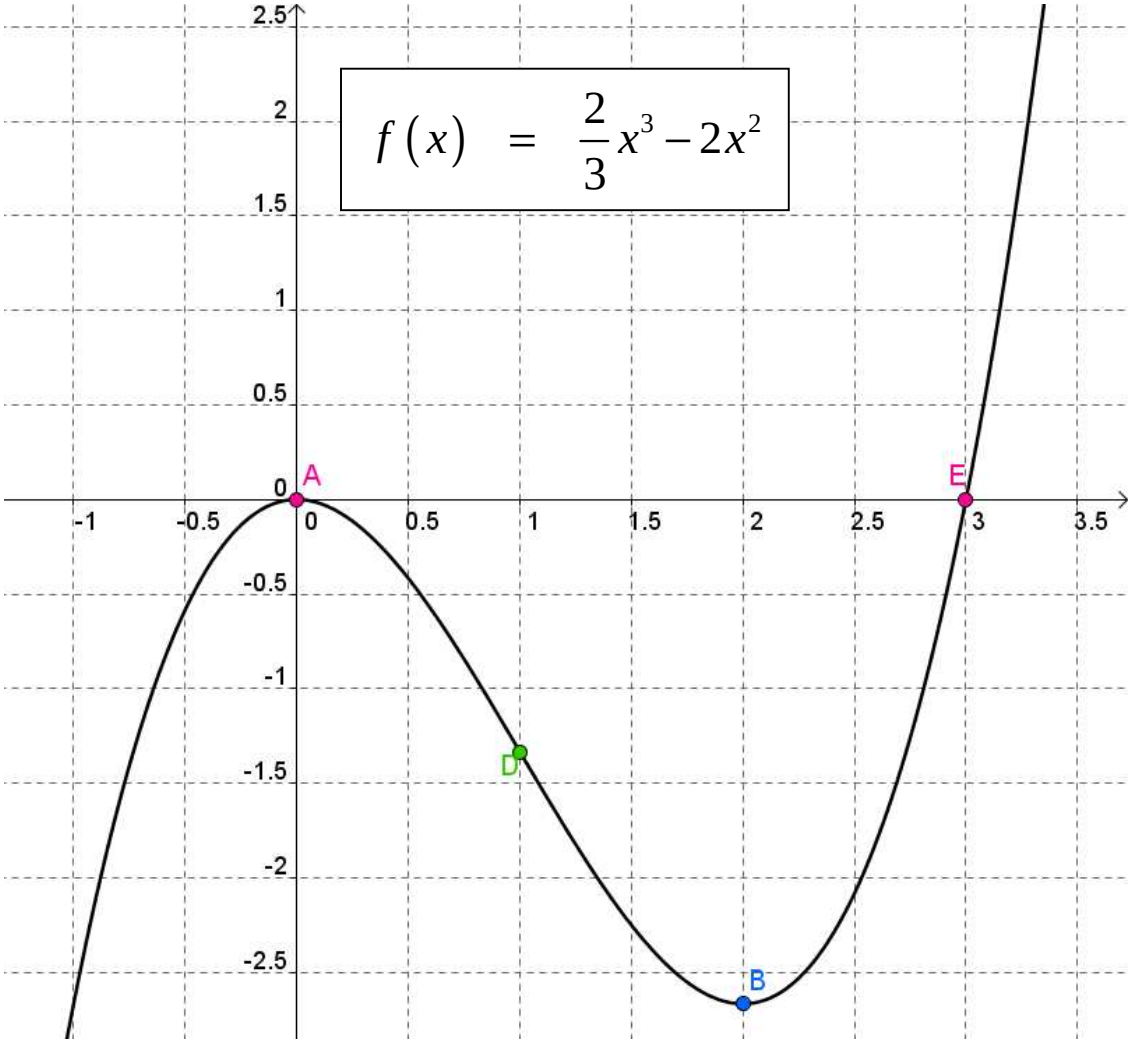
$$f'(x) = 2x^2-4x = 2x(x-2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \;\; und \;\; x_2 = 2$$
$$f''(x) = 4x-4$$
$$\Rightarrow f''(0) = -4<0 \Rightarrow Max(0 \mid 0)$$
$$\Rightarrow f''(2) = 4>0 \Rightarrow Min\left(2 \;\middle|\; -\frac{8}{3}\right)$$

c) Wendepunkte

Lösung:

$$f(x) = \frac{2}{3}x^3-2x^2$$

$$f''(x) = 4x-4 = 0 \Rightarrow x = 1$$
$$f'''(x) = -4 \Rightarrow f'''(1) = -4\neq 0 \Rightarrow WP\left(1 \;\middle|\; -\frac{4}{3}\right)$$



4.) Untersuchung ganzrationaler Parameterfunktionen

Gegeben sei folgende Funktion:

$$f_{a,b}(x) = ax^4 + bx^3 \quad mit \quad a,b \in \Re^+$$

Zeigen Sie, dass $f_{a,b}(x)$ immer genau zwei Wendestellen besitzt.

Lösung:

$$f_{a,b}'(x) = 4ax^3 + 3bx^2$$

$$f_{a,b}''(x) = 12ax^2 + 6bx = 0 \Rightarrow 6x(2ax+b) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0 \quad \wedge \quad x_2 = -\frac{b}{2a}$$

$$f_{a,b}'''(x) = 24ax + 6b$$

$$f_{a,b}'''(0) = 6b \underset{weg.Vor.}{\neq} 0 \Rightarrow \text{Wendepunkt 1 existiert}$$

$$f_{a,b}'''\left(-\frac{b}{2a}\right) = -6b \underset{weg.Vor.}{\neq} 0 \Rightarrow \text{Wendepunkt 2 existiert}$$

3.) Bestimmung bzw. Rekonstruktion von ganzrationalen Funktionen

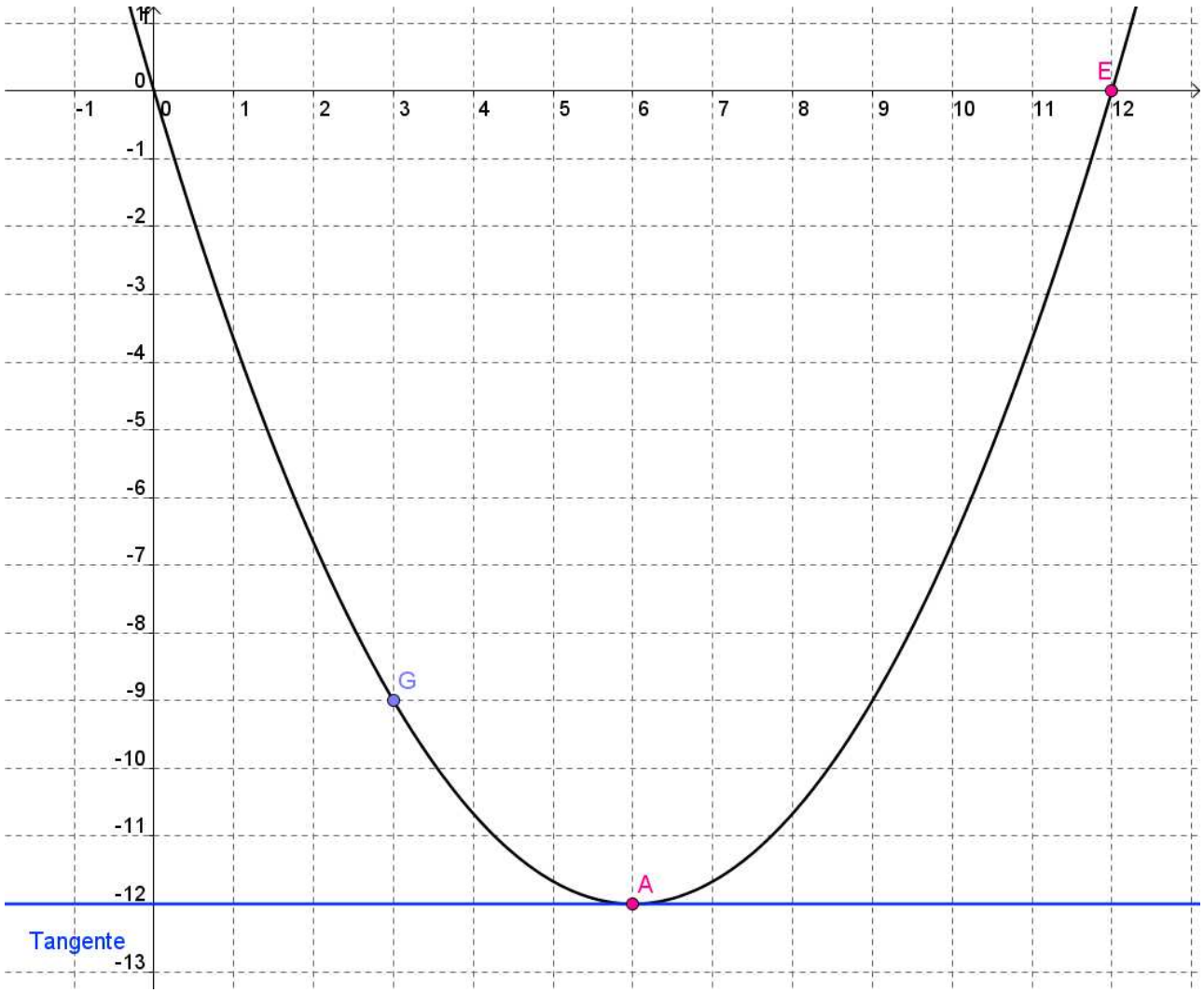
Die ganzrat. Fkt. $f(x) = \frac{1}{a}x^2 - bx$ verläuft durch den Punkt $P(3 \mid -9)$ und hat in **x = 6** einen Extremwert.

Lösung:

$$f(x) = \frac{1}{a}x^2 - bx \quad und \quad f'(x) = \frac{2}{a}x - b$$

$$\left.\begin{array}{ll} I.) & f(3) = \frac{9}{a} - 3b = -9 \\ II.) & f'(6) = \frac{12}{a} - b = 0 \end{array}\right\} \quad I.) - 3 \cdot II.) \quad -\frac{27}{a} = -9$$

$$\Rightarrow \quad a = 3 \quad \Rightarrow \quad b = 4 \quad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 4x$$



5.) Rekonstruktion ganzrationaler Funktionen

Der Graph einer ganzrationalen Funktion 3. Grades hat den Tiefpunkt $P(0 \mid -2)$ und den Wendepunkt $W(1 \mid 0)$.

Lösung:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \quad und \quad f''(x) = 6ax + 2b$$

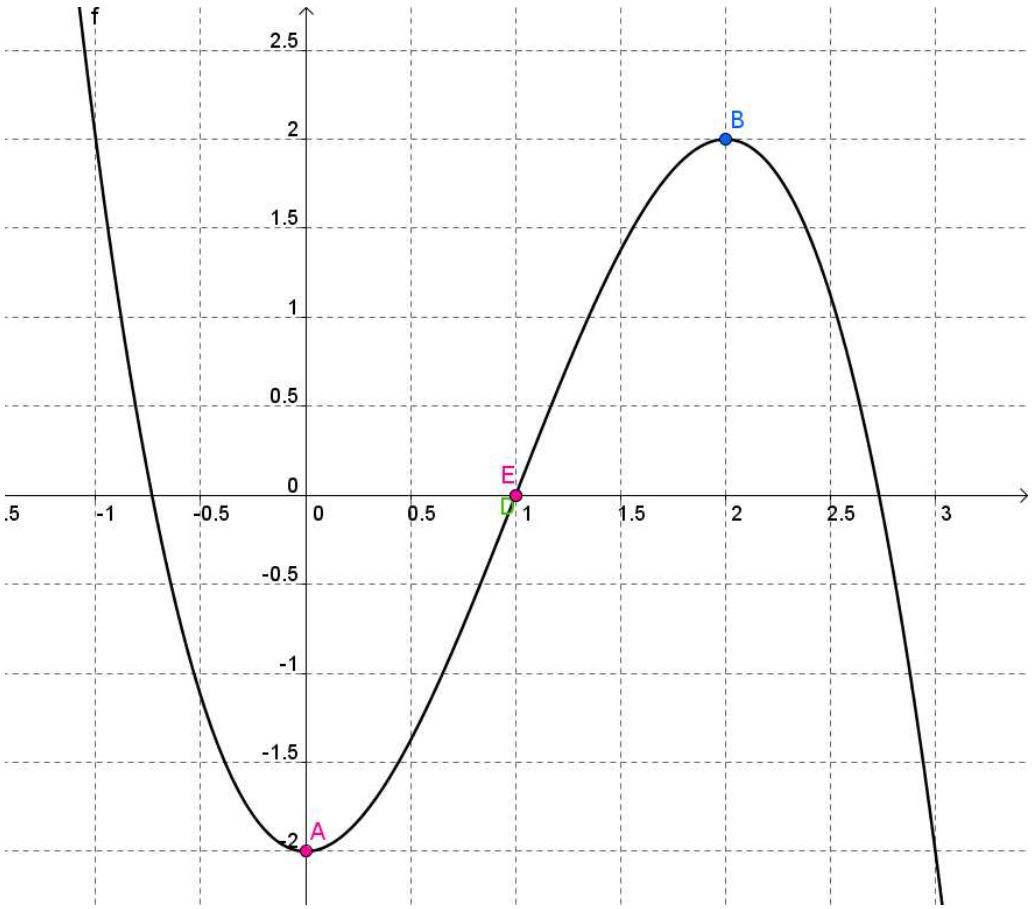
$$I.) \quad f(0) = d = -2$$

$$II.) \quad f(1) = a + b + c + d = 0$$

$$III.) \quad f'(0) = c = 0$$

$$IV.) \quad f''(1) = 6a + 2b = 0 \Rightarrow b = -3a$$

$$IV.) \, in \, II.) \quad a - 3a = 2 \Rightarrow -2a = 2$$

$$\Rightarrow a = -1 \Rightarrow b = 3$$

$$\Rightarrow f(x) = -x^3 + 3x^2 - 2$$