Musterlösung **11. Jgst.** **4. Klassenarbeit** **Datum: 20.05.2009**

Klasse: HBF **Fach: Mathematik**

Thema: **Kurvenuntersuchung ganzrat. Funktionen**
(Symmetrie - Nullstellen – Extrema – Wendepunkte – Tangenten)

1.) Wendepunkte

Gegeben sei die Funktion $f_k(x) = -x^2 + kx - 2$

Zeigen Sie, dass diese Funktion keinen Wendepunkt besitzt.

Lösung:

$$f_k(x) = -x^2 + kx - 2 \Rightarrow f_k'(x) = -2x + k$$
$$\Rightarrow f_k''(x) = -2 \neq 0 \Rightarrow \textit{keine Wendepunkte}$$

2.) Steigungen und Tangente(n)

Gegeben sei folgende Funktion: $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 3$

a) Berechnen Sie die Tangente in x = 2 an die Funktion

Lösung:

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 3 \xrightarrow{x=2} f(2) = -4 + 6 - 3 = -1$$

$$f'(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 3x \xrightarrow{x=2} f'(2) = -6 + 6 = 0 = m$$

$$\xrightarrow{t(x) = mx+b} -1 = 0 \cdot 2 + b \Rightarrow -1 = b$$

$$\textit{Tangente}: \; t(x) = -1$$

b) An welchen Stellen hat die Funktion eine Tangente mit folgender Gleichung: $t(x) = \frac{5}{6}x + b \quad mit \quad b \in \Re$

Lösung:

$$f'(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 3x = \frac{5}{6} \xrightarrow{+1} -\frac{3}{2}x^2 + 3x - \frac{5}{6} = 0$$

$$\Rightarrow x_{1/2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-5}}{-3} = \frac{-3 \pm 2}{-3} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{3} \quad und \quad x_2 = \frac{5}{3}$$

c) Wie groß ist die Steigung der Funktion in x = 1 ?

Lösung:

$$f'(x) = -\frac{3}{2}x^2+3x \xrightarrow{x=1} f'(1) = -\frac{3}{2}+3 = \frac{3}{2} = m$$

3.) Parameter bei ganzrationalen Funktionen

Gegeben sei die Funktion $f_k(x) = -\frac{1}{k}x^3+\frac{3}{2}x^2 \quad mit \quad k \in \Re \setminus \{0\}$.

Welchen Wert muss k annehmen, damit die Funktion an der Stelle

x = 2 einen Wendepunkt besitzt?

Lösung:

$$f_k(x) = -\frac{1}{k}x^3+\frac{3}{2}x^2 \Rightarrow f_k'(x) = -\frac{3}{k}x^2+3x$$

$$\Rightarrow f_k''(x) = -\frac{6}{k}x+3 = 0 \xrightarrow{x=2} -\frac{12}{k}+3 = 0 \Rightarrow k = 4$$

$$\Rightarrow f_k'''(x) = -\frac{6}{k} \neq 0 \Rightarrow \textit{Wendepunkt existiert}$$

4.) Symmetrie

a) Definieren Sie den Begriff „Achsensymmetrie" in mathematisch korrekter Form.

Lösung: $f(-x) = f(x)$

b) Durch welche Eigenschaft kann man eine Achsensymmetrie bereits in der Funktionsvorschrift erkennen?

Lösung: Alle Exponenten sind gerade.

c) Welche Symmetrie liegt vor? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

(i) $f(x) = -0,3x^5+2x^3+x$

Lösung: Punktsymmetrie, da alle Exponenten ungerade sind bzw. da gilt:

$$f(-x) = -f(x)$$

(ii) $f(x) = -2x^7 + x^3 - 4$

Lösung: keine Symmetrie, da gilt:

$$f(-x) \neq -f(x) \quad und \quad f(-x) \neq f(x)$$

(iii) $f(x) = x^2\left(-0,5x^4 + 3x^2 + 1\right)$

Lösung: $f(x) = -0,5x^6 + 3x^4 + x^2$

Achsensymmetrie, da gilt: alle Exponenten sind gerade bzw.

$$f(-x) = f(x)$$

(iv) $f(x) = -x^{4(n+1)} + 4x^{2n} \quad mit \quad n \in N$

Lösung: Achsensymmetrie, da gilt: alle Exponenten sind gerade bzw.

$$f(-x) = f(x)$$

5.) Kurvenuntersuchung

Gegeben sei folgende Funktion: $f(x) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{9}{2}x$

a) Bestimmen Sie

(i) die Nullstellen, (ii) die Extremwerte

(iii) und die Wendepunkte

Lösung:

(i)

$$Ansatz: \quad f(x) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{9}{2}x = 0 \Rightarrow x\left(-\frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{9}{2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0 \quad und \quad x_{1/2} = \frac{-\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 4 \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) \cdot \left(-\frac{9}{2}\right)}}{2 \cdot \left(-\frac{1}{8}\right)} = \frac{-\frac{3}{2} \pm 0}{-\frac{1}{4}} = 6$$

(ii)

$$f'(x) = -\frac{3}{8}x^2+3x-\frac{9}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad x_{1/2} = \frac{-3\pm\sqrt{9-\frac{27}{4}}}{2\cdot\left(-\frac{3}{8}\right)} = \frac{-3\pm\frac{3}{2}}{-\frac{3}{4}} \quad \Rightarrow \quad x_1=2 \quad \wedge \quad x_2=6$$

$$f''(x) = -\frac{3}{4}x+3$$

$$\Rightarrow \quad f''(2) = \frac{3}{2}>0 \quad \Rightarrow \quad Min(2\mid -4)$$

$$\Rightarrow \quad f''(6) = -\frac{3}{2}x<0 \quad \Rightarrow \quad Max(6\mid 0)$$

(iii)

$$f''(x) = -\frac{3}{4}x+3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 4$$

$$f'''(x) = -\frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad f'''(4) = 4\neq 0 \quad \Rightarrow \quad W(4\mid -2)$$

b) Zeigen Sie, dass die beiden Extremwerte und der Wendepunkt auf einer Geraden mit der Gleichung g(x) = x - 6 liegen.

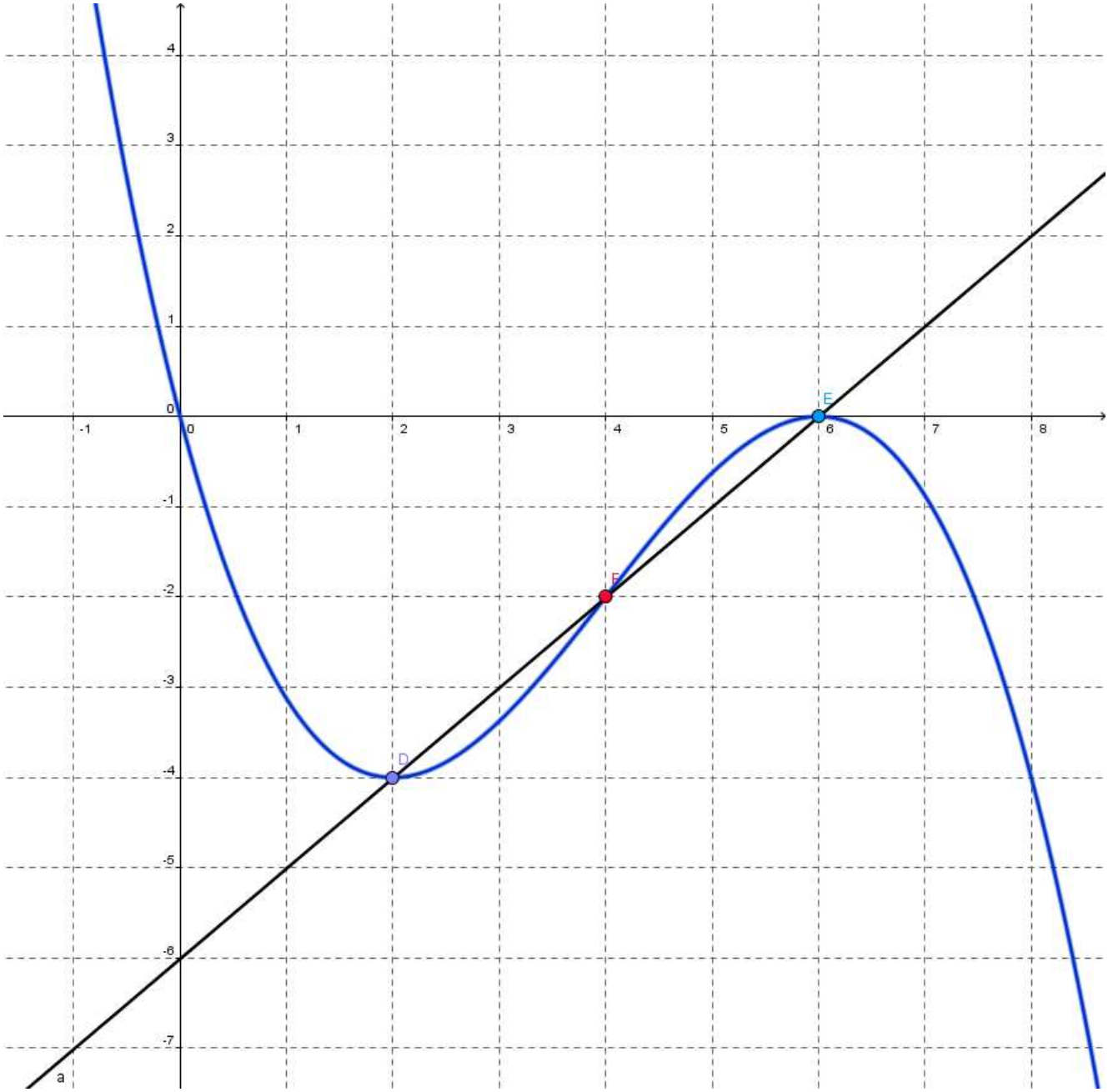
Lösung: Punktprobe:

$$g(x) = x-6$$

$$TP: \quad g(2) = 2-6 = -4 \qquad HP: \quad g(6) = 6-6 = 0$$

$$WP: \quad g(4) = 4-6 = -2$$

Zeichnung: Graph der Funktion und die Gerade mit den drei Punkten



6.) Extremwerte bestimmen

a) Wie lautet die notwendige Bedingung für einen Extremwert?

Lösung: $f'(x) = 0$

b) Nennen Sie die hinreichende Bedingung für einen Extremwert?

Lösung:

$$\textit{Tiefpunkt}: \quad f'(x) = 0 \quad \textit{und} \quad f''(x) > 0$$
$$\textit{Hochpunkt}: \quad f'(x) = 0 \quad \textit{und} \quad f''(x) < 0$$

c) Was versteht man unter dem Ersatzkriterium bei der Ermittlung von Extremwerten?

Lösung: Sollte die zweite Bedingung (zweite Ableitung) eine nicht von 0 verschiedene Zahl ergeben, dann muss das Steigungsverhalten in der Umgebung der Stelle x0 untersucht werden; kommt es zu einen Vorzeichenwechsel bei den Ergebnissen der ersten Ableitung, dann liegt ein Extremwert vor; ansonsten ein Sattelpunkt.

$$\textit{Tiefpunkt}: \quad f'(x-h) < 0 \quad \textit{und} \quad f'(x+h) > 0$$
$$\textit{Hochpunkt}: \quad f'(x-h) > 0 \quad \textit{und} \quad f'(x+h) < 0$$

d) Bestimmen Sie die Extremwerte der folgenden Funktion:

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3$$

Lösung:

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 = 12x^2(x-1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0\,(\textit{doppelt}) \wedge x = 1$$
$$f''(x) = 36x^2 - 24x$$
$$\Rightarrow \quad f''(0) = 0\,?? \quad \Rightarrow \quad \textit{Ersatzkriterium}$$

Steigungsverhalten:

$$f'(-1) = -12 - 12 = -24 < 0 \quad \Rightarrow \quad \textit{monoton fallend}$$
$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 9 - 12 = -3 < 0 \quad \Rightarrow \quad \textit{monoton fallend}$$

Es liegt kein Extremwert vor, kein Vorzeichenwechsel bei der Steigung existiert.

$$\Rightarrow \quad f''(1) = 12 > 0 \quad \Rightarrow \quad \textit{Min}(1 \mid -1)$$