Musterlösung **11. Jgst.** **3. Klassenarbeit** **Datum: 11.03.2009**

Klasse: HBF **Fach: Mathematik**

Thema: Ableitung von Potenzfunktionen; Steigung in x

1.) Ableitungen von Funktionen

Bilden Sie die erste Ableitung zu folgenden Funktionen:

a) $f(x) = \frac{2}{5}x^5 - \frac{4}{9}x^3 + 3x - \frac{1}{3}$

Lösung: $f'(x) = 2x^4 - \frac{4}{3}x^2 + 3$

b) $u(x) = 2x^7 - 4x^5 + 3$

Lösung: $u'(x) = 14x^6 - 20x^4$

c) $h(x) = \frac{1}{2n^2}x^{3n} - 4x^{2n}$

Lösung: $h'(x) = \frac{3}{2n}x^{3n-1} - 8nx^{2n-1}$

d) $k(x) = \frac{1}{4}x^{-4} + \frac{3}{5}x^{-5}$

Lösung: $k'(x) = -x^{-5} - 3x^{-6}$

e) $p(x) = \frac{1}{n}x^{n+2} - \frac{2}{n-1}x^{n-3}$

Lösung: $p'(x) = \frac{n+2}{n}x^{n+1} - \frac{2(n-3)}{n-1}x^{n-4}$

f) $w(x) = 2x^{0,7} - 3x^{\frac{1}{6}} + 4x^{-\frac{2}{5}}$

Lösung: $w'(x) = 1,4x^{-0,3} - \frac{1}{2}x^{-\frac{5}{6}} - \frac{8}{5}x^{-\frac{7}{5}}$

g) $g_k(x) = kx^4 - k^2x^3 + kx - k^{-1}$

Lösung: $g_k'(x) = 4kx^3 - 3k^2x^2 + k$

2.) Steigung von Funktionen I

Gegeben ist folgende Funktion: $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - x$

a) Wie groß ist die Steigung in x = 2?

Lösung: $f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 1 \xrightarrow{x=2} f'(2) = 4$

b) Bei welchen Werten von x liegt eine Steigung von m = - 1?

Lösung:

$$f'(x) = m \Rightarrow \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 1 = -1 \xrightarrow{+1} \frac{1}{2}x(3x-1) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0 \quad und \quad x_2 = \frac{1}{3}$$

c) Wo hat diese Funktion Hoch- oder Tiefpunkte?
Prüfen Sie dabei auch, welche Art vorliegt.

Lösung:

$$f'(x) = m \Rightarrow \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow x_{1/2} = \frac{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 6}}{3} = \frac{\frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}}{3} \Rightarrow x_1 = 1 \quad und \quad x_2 = -\frac{2}{3}$$

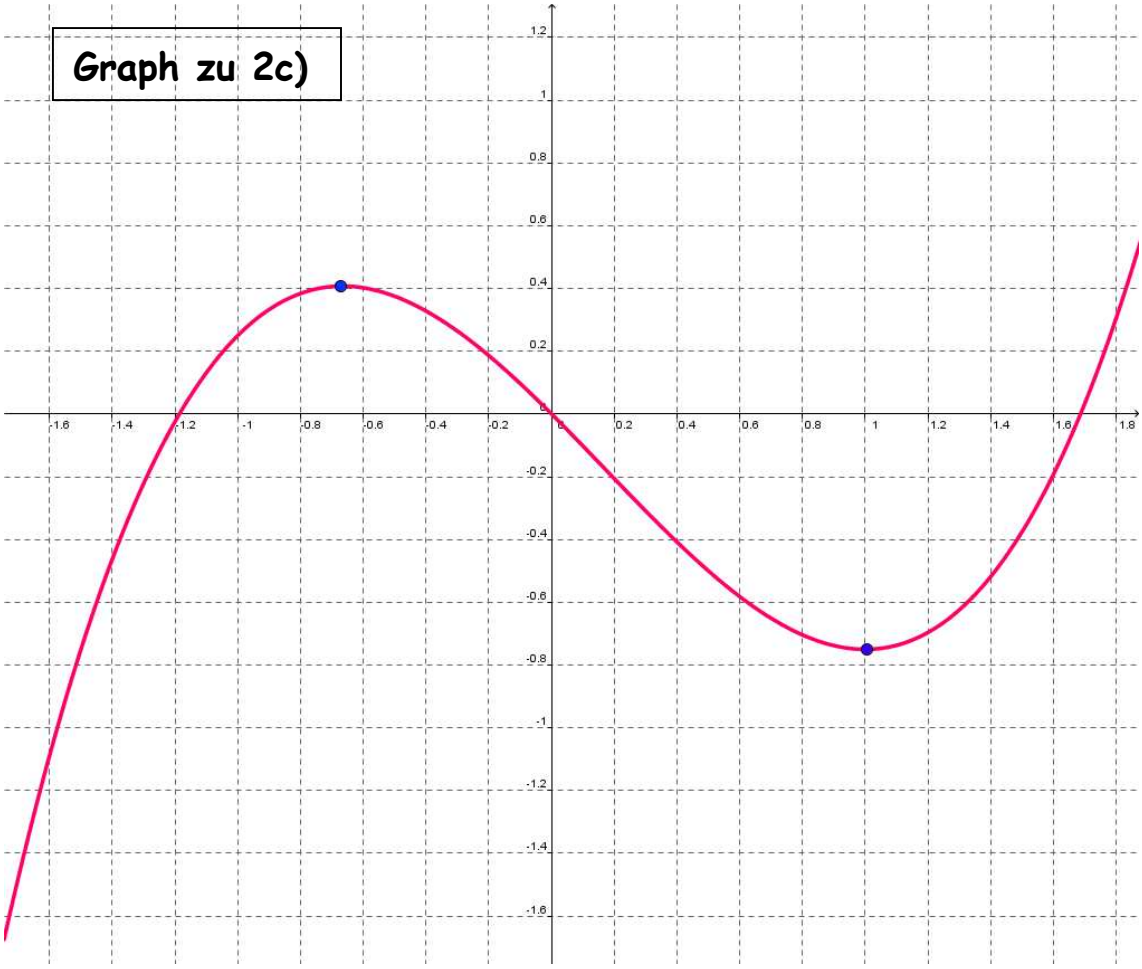
Prüfen der Extremwertstellen:

$$f'(-1) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} - 1 = 1 \Rightarrow monoton\ steigend$$

$$f'(0) = -1 \Rightarrow monoton\ fallend$$

$$f'(2) = 4 - 1 - 1 = 2 \Rightarrow monoton\ steigend$$

$$\Rightarrow Max\left(-\frac{2}{3} \,\middle|\, \frac{11}{27}\right) \quad und \quad Min\left(1 \,\middle|\, -\frac{3}{4}\right)$$



3.) Steigung von Funktionen II

Gegeben sei die Funktion $f(x) = -x^2+8x-11$

a) Zeigen Sie, dass die Funktion genau einen Hochpunkt besitzt und bestimmen Sie dessen Koordinaten.

Lösung:

$$f'(x) = -2x+8 = 0 \Rightarrow x = 4$$

Kontrolle der Art des Extremwertes:

$$f'(3) = -2\cdot 3+8 = 2<0 \Rightarrow \textit{monoton steigend}$$

$$f'(5) = -2\cdot 5+8 = -2<0 \Rightarrow \textit{monoton fallend}$$

$$\Rightarrow HP(4 \mid f(4)) = HP(4 \mid 5)$$

Gegeben sei nun folgende Funktion: $f_k(x) = \frac{1}{4}x^2 - kx + 2k$

b) Wie muss der Parameter k gewählt werden, damit die Steigung in x = 2 den Wert m = - 3 besitzt?

Lösung:

$$f_k'(x) = \frac{1}{2}x - k \Rightarrow f_k'(2) = 1 - k = -3 \Rightarrow k = 4$$

c) Wie muss Parameter k gewählt werden, damit der Hochpunkt der Funktion in x = 1 liegt?

Lösung:

$$f_k'(x) = \frac{1}{2}x - k \Rightarrow f_k'(1) = \frac{1}{2} - k = 0 \Rightarrow k = \frac{1}{2}$$

4.) Tangente(n)

Berechnen Sie die Tangente in x = - 1 an die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{5}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x$$

Lösung:

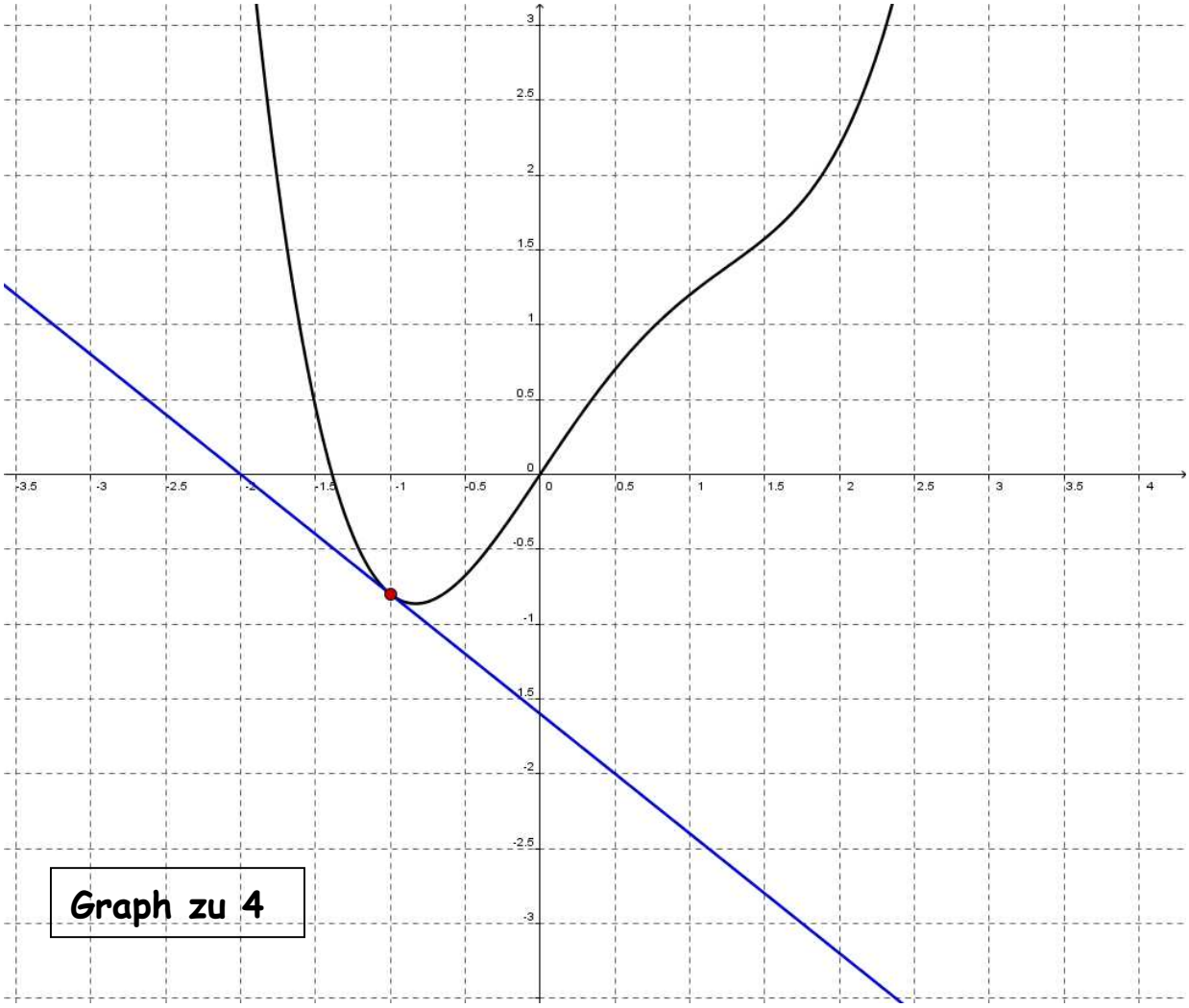
$$y\text{-}Wert: \quad f(-1) = \frac{1}{5}\cdot(-1)^4 - \frac{1}{2}\cdot(-1)^3 + \frac{3}{2}\cdot(-1) = -0{,}8$$

$$Steigung: \quad f'(x) = \frac{4}{5}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}$$

$$\xrightarrow{x=-1} \quad f'(-1) = \frac{4}{5}\cdot(-1)^3 - \frac{3}{2}\cdot(-1)^2 + \frac{3}{2} = -0{,}8$$

$$y\text{-}Achsenabschnitt: \quad -0{,}8 = (-0{,}8)\cdot(-1) + b \Rightarrow b = -1{,}6$$

$$Tangente: \quad t(x) = (-0{,}8)x - 1{,}6$$



5.) Mathematisches Begründen

a) Warum wird die Ableitung einer konstanten Funktion f(x) = c zu 0?

Lösung:

$$f(x) = c \overset{1=x^0}{=} c \cdot x^0 \xrightarrow{Ableitung} f'(x) = 0 \cdot c \cdot x^{-1} = 0$$

oder mit dem Differentialquotient:

$$f(x) = c \quad und \quad f(x+h) = c$$

eingesetzt:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c-c}{h} = 0 = m$$

b) Erklären Sie anhand der rechnerischen Zwischenschritte, weshalb bei der Funktion f(x) = 2x bei der Ableitung das „x" verschwindet?

Lösung:

$$f(x) = 2x^1 \xrightarrow{Ableitung} f'(x) = 1 \cdot 2x^{1-1} = 2x^0 \overset{x^0=1}{=} 2$$

oder mit dem Differentialquotient:

$$f(x) = 2x \quad und \quad f(x+h) = 2(x+h)$$

$eingesetzt$:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2(x+h) - 2x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2h}{h} = 2 = m$$

c) Erläutern Sie kurz, welche Rechenschritte notwendig sind, um einen Hochpunkt bei einer Funktion zu ermitteln.

Lösung:

(1) Erste Ableitung der Funktion ermitteln und mit 0 gleichsetzen, weil in einem Extrempunkt die Steigung den Wert 0 annehmen muss.

(2) Berechnen der gesuchten Stelle.

(3) Kontrolle der Steigung: Vorzeichenwechsel in f'(x) für $f'(x \pm h)$

a) von steigend zu fallend: Hochpunkt
b) von fallend zu steigend: Tiefpunkt

6.) Von der Ableitung zur Funktion

Ermitteln Sie den Funktionsterm zu den gegebenen Ableitungen.

a) $f'(x) = x^4$ ***Lösung:*** $f(x) = \frac{1}{5}x^5$

b) $h'(x) = 2x + 3$ ***Lösung:*** $h(x) = x^2 + 3x$