Musterlösung **12. Jgst.** **4. Klassenarbeit** **Datum: 11.05.2009**

Klasse: HBFDV 07 **Fach: Mathematik**

Thema: **Kurvendiskussion ganzrat. Funktionen; Bestimmungsaufgaben; Integralrechnung**

1.) Integral - Stammfunktion

Bilden Sie die Stammfunktion:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^5 - 6x^4 + 4x^3 - x$$

Lösung: $$F(x) = \frac{1}{18}x^6 - \frac{6}{5}x^5 + x^4 - \frac{1}{2}x^2 + c$$

2.) Flächenberechnung

Ermitteln Sie die Fläche unter Kurve $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - x$ im Intervall $I = [2;5]$.

Lösung: Es liegen im Intervall keine Nullstellen vor, daher kann über das gesamte Intervall integriert werden.

Nullstellen: $x_1 = 0 \quad \wedge \quad |x| = \sqrt{2}$

$$F(x) = \left[\frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{2}x^2\right]_2^5 = \left(\frac{1}{8}\cdot 5^4 - \frac{1}{2}\cdot 5^2\right) - \left(\frac{1}{8}\cdot 2^4 - \frac{1}{2}\cdot 2^2\right)$$

$$F(x) = 65{,}625 - 0 = 65{,}625$$

3.) Integral – Grenzen berechnen

Ermitteln Sie die Lösung für den Wert von k: $\int_0^k \left(\frac{1}{2}x^2 - x\right)dx = 0$

Lösung:

$$\int_0^k \left(\frac{1}{2}x^2 - x\right)dx = \left[\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right]_0^k = \frac{1}{6}k^3 - \frac{1}{2}k^2 - 0$$

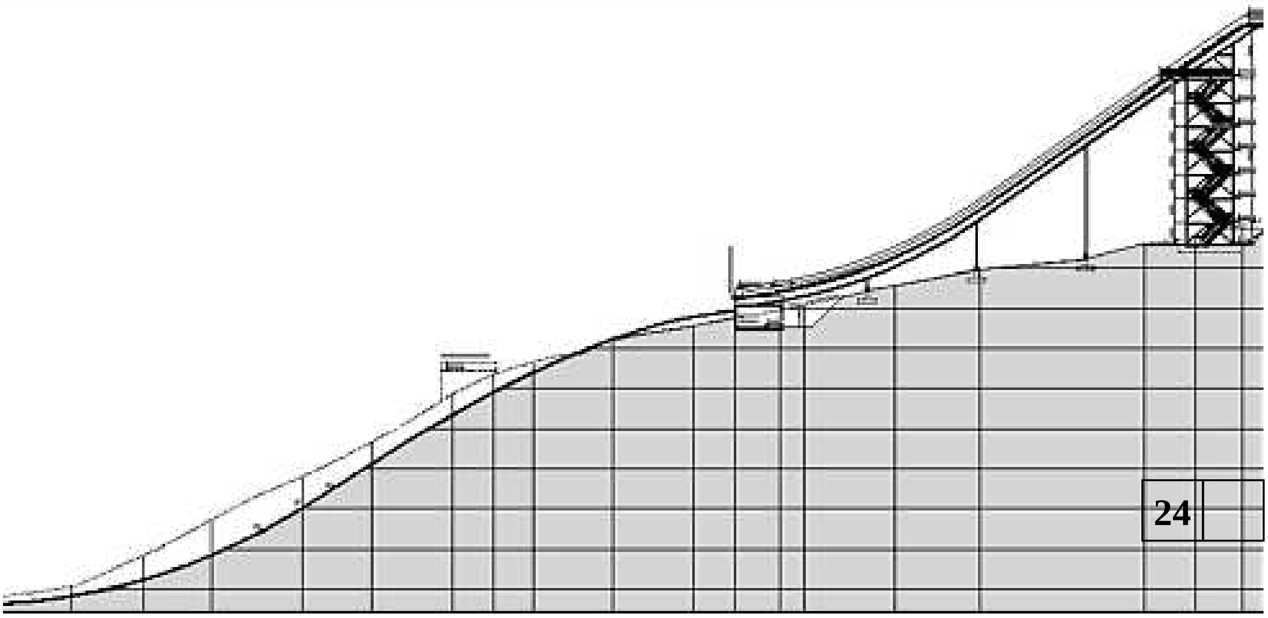
$$\frac{1}{6}k^3 - \frac{1}{2}k^2 = 0 \Rightarrow k^2\left(\frac{1}{6}k - \frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow k_1 = 0 \quad \wedge \quad k_2 = 3$$

4.) Bestimmungsaufgabe - Steckbriefaufgabe

Ein Skispringer springt vom Absprungpunkt des Schanzentisches (Höhe 80 m) ab, fliegt 100 m weit und landet auf einer Höhe von 20 m im Winkel von 135 ° auf dem Aufsprunghügel.

Die Flugkurve ist annähernd parabelförmig.

Ermitteln Sie die Funktionsvorschrift der Flugkurve.



(Anlage zu Aufgabe 4)

Lösung: allgemeine Parabelgleichung $f(x) \; = \; ax^2 + bx + c$

Bestimmungsgleichungen:

I.) $P_1(0 \mid 80) \;\Rightarrow\; c \;=\; 80$

II.) $P_1(100 \mid 20) \;\Rightarrow\; 10.000a + 100b + 80 \;=\; 20$

III.)

$$P_1(100 \mid 20)\; mit\; m = -1 \;\Rightarrow\; f'(x) \;=\; 2ax + b \;\Rightarrow\; 200a + b \;=\; -1$$

Ergebnis: $a = -\dfrac{1}{250} \;\wedge\; b = -\dfrac{1}{5} \;\Rightarrow\; f(x) \;=\; -\dfrac{1}{250}x^2 - \dfrac{1}{5}x + 80$

5.) Untersuchung einer ganzrationalen Funktion

Führen Sie bei folgender Funktion

$$f(x) = \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{3}x^3$$

eine Untersuchung nach folgenden Kriterien durch:

a) Symmetrie

b) Nullstellen

c) Extremwerte

d) Wendepunkte

e) Skizze der Funktion

f) Ermitteln Sie die Funktionsgleichung der Tangente in x = 1.

Lösung:

a) keine Symmetrie, da gerade und ungerade Hochzahlen vorliegen.

b) $$x^3\left(\frac{1}{8}x - \frac{1}{3}\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0\,(dreifach) \wedge x_2 = \frac{8}{3}$$

c)

$$f'(x) = x^2\left(\frac{1}{2}x - 1\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \wedge x_2 = 2$$

$$f''(x) = \frac{3}{2}x^2 - 2x \Rightarrow f''(2) = 2 > 0 \Rightarrow Min\left(2 \,\middle|\, -\frac{2}{3}\right)$$

x = 0 ist keine Extremwertstelle, da sie als dreifache Nullstelle vorliegt.

d)

$$f''(x) = x\left(\frac{3}{2}x - 2\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \wedge x_2 = \frac{4}{3}$$

$$f'''(x) = 3x - 2$$

$$\Rightarrow f'''(0) = -2 \neq 0 \Rightarrow W(0 \mid 0)$$

$$\Rightarrow f'''\left(\frac{4}{3}\right) = 2 \neq 0 \Rightarrow W\left(\frac{4}{3} \,\middle|\, -\frac{32}{81}\right)$$

f)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{3}x^3 &\Rightarrow\quad f(1) &= -\frac{5}{24}\\
f'(x) &= \frac{1}{2}x^3 - x^2 &\Rightarrow\quad f'(1) &= -\frac{1}{2}\\
\Rightarrow\quad -\frac{5}{24} &= -\frac{1}{2}\cdot 1 + b &\Rightarrow\quad b &= \frac{7}{24}\\
\Rightarrow\quad t(x) &= -\frac{1}{2}x + \frac{7}{24}
\end{aligned}
$$

e)