Musterlösung **12. Jgst.** **3. Klassenarbeit** **Datum 16.03.2009**

Klasse: HBF **Fach: Mathematik**

Thema: Gebrochen-rat. Funktionen; Integralrechnung

1.) Stammfunktionen

Ermitteln Sie die Stammfunktion zu der jeweiligen Funktion f(x):

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 15$

Lösung: $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 15x + c$

b) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2x$ ***Lösung:*** $F(x) = \frac{1}{9}x^3 - x^2 + c$

c) $f(x) = 2x - x^{-2}$ ***Lösung:*** $F(x) = x^2 + x^{-1} + c$

d) $f(x) = \frac{1}{2}x - x^{0,5}$ ***Lösung:*** $F(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{2}{3}x^{1,5} + c$

e) $f(x) = ax^4 - bx^2$ ***Lösung:*** $F(x) = \frac{1}{5}ax^5 - \frac{1}{3}bx^3 + c$

f) $f(x) = 2x^{n-1} - 3x^n$

Lösung: $F(x) = \frac{2}{n}x^n - \frac{3}{n+1}x^{n+1} + c$

2.) Berechnung von Flächen

Berechnen Sie die Fläche unter der Randfunktion f(x) mit
der x-Achse in den vorgegebenen Grenzen:

a) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 \qquad [2\,;4]$

Lösung: $\int_2^4 \frac{1}{2}x^2 dx = \left[\frac{1}{6}x^3\right]_2^4 = \frac{1}{6}(64-8) = \frac{1}{6}\cdot 56 = 9\frac{1}{3}$

b) $f(x) = x^3 - 1 \qquad [1\,;3]$

Lösung:

$$\int_1^3 \left(x^3-1\right)dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - x\right]_1^3 = \left(\frac{81}{4}-3\right)-\left(\frac{1}{4}-1\right) = 17,25-(-0,75) = 18$$

3.) Berechnung Sie die Grenzen

a) $\int_1^b \frac{1}{4}x^2 = 5,25$

Lösung:

$$\int_1^b \frac{1}{4}x^2 = 5,25 \Rightarrow \left[\frac{1}{12}x^3\right]_1^b = 5,25 \Rightarrow \frac{1}{12}\left(b^3-1\right) = 5,25$$

$$\xrightarrow{\cdot 12} b^3-1 = 63 \xrightarrow{+1} b^3 = 64 \xrightarrow{\sqrt[3]{\ }} b = 4$$

b) $\int_a^5 \frac{1}{25}x^3dx = 6,25$

Lösung:

$$\int_a^5 \frac{1}{25}x^3dx = 6,25 \Rightarrow \left[\frac{1}{100}x^4\right]_a^5 = 6,25 \Rightarrow \frac{1}{100}\left(625-a^4\right) = 6,25$$

$$\xrightarrow{\cdot 100} 625-a^4 = 625 \xrightarrow{-625} -a^4 = 0 \Rightarrow a = 0$$

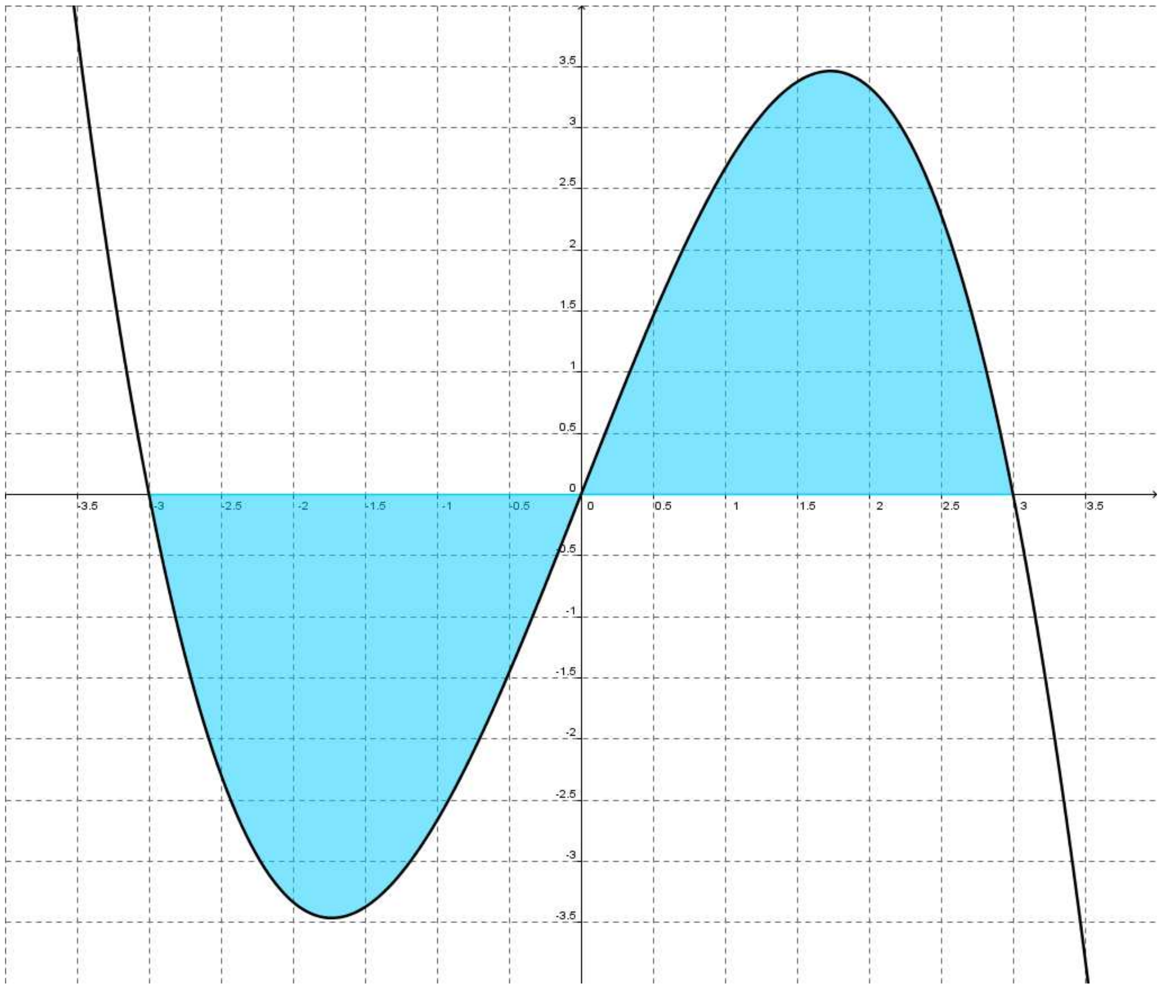
4.) Berechnung von Flächen

Bei Ermittlung der Fläche unter der Randfunktion $f(x) = -\frac{1}{3}x^3+3x$ ist ein Fehler unterlaufen, denn hier kam eine Fläche von 0 heraus.

a) Erklären Sie den Fehler in dieser Berechnung

Lösung: Hier wurden positive und negative Flächen miteinander verrechnet ohne darauf zu achten, dass im Integrationsintervall eine einfache Nullstelle vorliegt.

Zur korrekten Ermittlung der Flächenmaßzahl muss die Nullstelle bestimmt und das Integrationsintervall an dieser Stelle geteilt werden, wodurch zwei Einzelflächen entstehen.



Schritt 2: Flächenberechnung

Aus Gründen der Punktsymmetrie gilt:

$$2 \cdot \int_0^3 \left(-\frac{1}{3}x^3 + 3x \right) dx \quad = \quad 2 \cdot \left[-\frac{1}{12}x^4 + \frac{3}{2}x^2 \right]_0^3 \quad = \quad 2 \cdot \left(-\frac{81}{12} + \frac{27}{2} \right) \quad = \quad 13{,}5$$

5.) Mathematische Fragestellung zum Integral

Der Ausdruck $\int_a^b f(x)\,dx$ besteht genau genommen aus verschiedenen Elementen.

Erklären Sie den Ausdruck und die einzelnen Symbole bzw. Elemente.

<u>Lösung:</u> Das Integralzeichen ist ein stilisiertes S und symbolisiert die Summe der Rechteckteilflächen der Ober- und Untersumme zur Herleitung des Integrals;

f(x) ist die Randfunktion, unter der die Fläche mit der x-Achse bestimmt werden soll und stellt zugleich die Höhe der Rechtecke dar;

dx stammt aus der Breite der Rechtecke und wird bei der Flächenberechnung aus $\Delta x = x_n - x_{n-1}$ hergeleitet; im Rahmen des Grenz-wertübergangs für $n \longrightarrow \infty$, wobei n die Anzahl der Rechtecke darstellt, wird dann aus der Breite

$$\lim_{n\to\infty} \Delta x \quad \to \quad dx$$

a und b stellen die jeweiligen Intervallgrenzen dar, über das integriert werden soll.

6.) Mathematische Fragestellungen zu gebrochen-rationalen Funktionen

Erklären Sie kurz folgende Begriffe:

a) **Polstelle**

Unter einer Polstelle einer gebr.-rat. Funktion versteht man eine Stelle

für die gilt: $\lim_{x\to x_0} f(x) \quad \to \quad \pm\infty$

b) **Lücke**

Unter einer Lücke einer gebr.-rat. Funktion versteht man eine Stelle

für die gilt: $\lim_{x\to x_0} f(x) \quad \to \quad a$

7.) Konstruktion einer gebrochen-rationalen Funktion

Von einer gebr-rat. Funktion sind folgende Eigenschaften bekannt:

Polstelle: x = -3; Nullstelle: x = 1; Asymptote: a(x) = 2

Wie lautet die Funktionsvorschrift?

<u>Lösung:</u> $f(x) = \dfrac{2x-2}{x+3}$

8.) Untersuchung von gebrochen-rationalen Funktionen

Untersuchen Sie die Funktionen nach folgenden Kriterien:

Nullstellen – Polstellen – Lücken – Asymptoten – Sy –

und zeichnen Sie dann die Funktionen entsprechend den Ergebnissen.

a) $f(x) = \dfrac{2x-3}{x+2}$

Lösung:

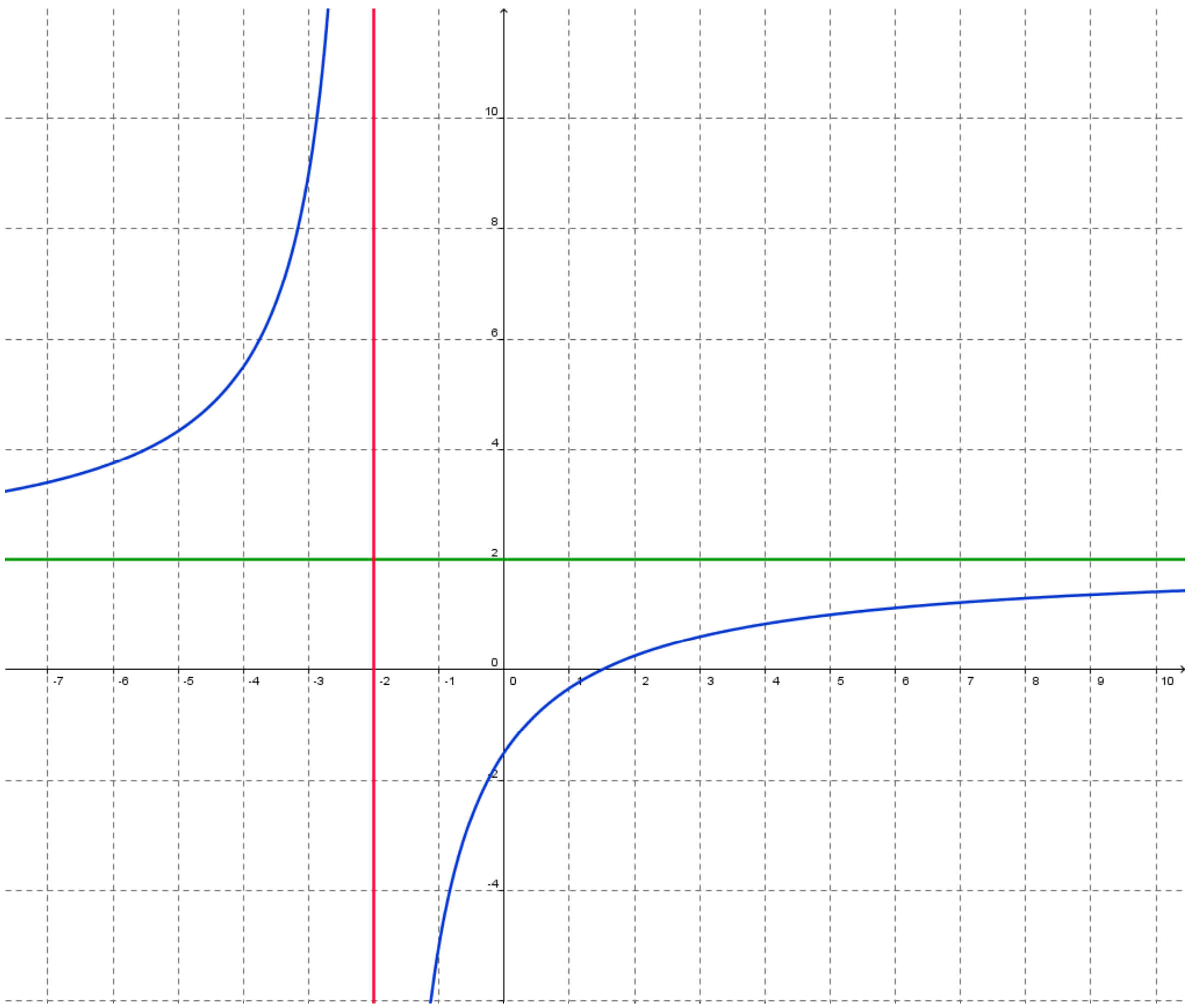
$$Zähler: \quad 2x-3=0 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{3}{2} \quad [Nullstelle]$$

$$Nenner: \quad x+2=0 \quad \Rightarrow \quad x=-2 \quad [Pol\ mit\ VZW]$$

$$keine\ Lücke$$

$$Asymptote: Zählergrad = Nennergrad \quad \Rightarrow \quad a(x)=2$$

$$S_y\left(0 \,\middle|\, -\frac{3}{2}\right)$$



b) $f(x) = \dfrac{2x^2 - 8x}{x^2 + 3x - 4}$

Lösung:

$$Zähler: \quad 2x^2 - 8x = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x(x-4) = 0$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = 0 \quad und \quad x_2 = 4 \quad [2\ Nullstellen]$$

$$Nenner: \quad x^2 + 3x - 4 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = -4 \quad und \quad x_2 = 1 \quad [2\ Polstellen\ mit\ VZW]$$

$keine\ Lücke$

$$Asymptote: Zählergrad = Nennergrad \quad \Rightarrow \quad a(x) = 2$$

$$S_y(0 \mid 0)$$