Musterlösung **12. Jgst.** **1. Klassenarbeit** **Datum: 29.09.2008**

Klasse: HBF **Fach: Mathematik**

Thema: **Kurvendiskussion ganzrat. Funktionen;**
Ableitung (inkl. Produkt- & Kettenregel)

1.) Ableitungen

Bilden Sie die 1. Ableitung zu folgenden Funktionen:

a) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 3$

b) $f(x) = ax^n + bx^m$

c) $f(x) = ax^3 - bx^2 + 1$

d) $f(x) = -x^{2n+1} + 3x^{n-1}$

e) $f(x) = \left(2x^3 + 4x - 2\right)^5$

f) $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x}$

g) $f(x) = \left(2x^3 - 2\right)\left(3x^4 + 1\right)$

h) $f(x) = \sqrt{x^4 + 2x}$

i) $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x}$

j) $f(x) = \left(2x^2 + x\right)^3 (1 - x)^4$

Lösung:

a) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 3$ => $f'(x) = x^3 - 4x$

b) $f(x) = ax^n + bx^m$ => $f'(x) = nax^{n-1} + mbx^{m-1}$

c) $f(x) = ax^3 - bx^2 + 1$ => $f'(x) = 3ax^2 - 2bx$

d) $f(x) = -x^{2n+1} + 3x^{n-1}$

=> $f'(x) = -(2n+1)x^{2n} + 3(n-1)x^{n-2}$

e) $f(x) = \left(2x^3 + 4x - 2\right)^5$

=> $f'(x) = 5\left(2x^3 + 4x - 2\right)^4\left(6x^2 + 4\right)$

f) $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x}$ => $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}$

g) $f(x) = \left(2x^3 - 2\right)\left(3x^4 + 1\right)$

=> $f'(x) = 6x^2\left(3x^4 + 1\right) + 12x^3\left(2x^3 - 2\right)$

h) $f(x) = \sqrt{x^4+2x}$ => $f'(x) = \frac{4x^3+2}{2\sqrt{x^4+2x}}$

i) $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x} = x+1+\frac{1}{x}$ => $f'(x) = 1-\frac{1}{x^2}$

j) $f(x)=(2x^2+x)^3(1-x)^4$

=> $f'(x)=3(2x^2+x)^2(4x+1)(1-x)^4-4(2x^2+x)^3(1-x)^3$

2.) Steigung einer Funktion

Berechnen Sie die Steigung der Funktion f(x) im Punkt P:

a) $f(x) = 3x^2-4x \qquad P(1 \mid 3)$

__*Lösung:*__ $f'(x) = 6x-4 \xrightarrow{x=1} f'(1) = 6-4 = 2 = m$

b) $f(x) = 2x-\frac{1}{x^2} \qquad P(3 \mid 2)$

__*Lösung:*__

$$f'(x) = 2+\frac{2}{x^3} \xrightarrow{x=3} f'(3) = 2+\frac{2}{27} = 2\frac{2}{27} = 2{,}074 = m$$

3.) Tangentenermittlung

Berechnen Sie die Tangente der Funktion f(x) an den Graphen unter den gegebenen Bedingungen:

a) $f(x) = \frac{1}{2}x^2-3x \qquad Tangente\ in\ x=4$

__*Lösung:*__

$(i) \quad f(4) = \frac{1}{2}\cdot 16-3\cdot 4 = -4$

$(ii) \quad f'(x) = x-3 \xrightarrow{x=4} f'(4) = 4-3 = 1 = m$

$(iii) \quad Tangente: \ t(x) = x-8$

Rechenweg: $-4 = 1\cdot 4+b \Rightarrow b = -8$

b) $f\left(x\right) = \dfrac{3}{4}x^4 - 4$ $\quad$ *Tangente mit Steigung* $m = 3$

Lösung:

(i) Berechnung x-Wert:

$$f'(x) = 3x^3 = m \xrightarrow{m=3} 3x^3 = 3 \Rightarrow x = 1$$

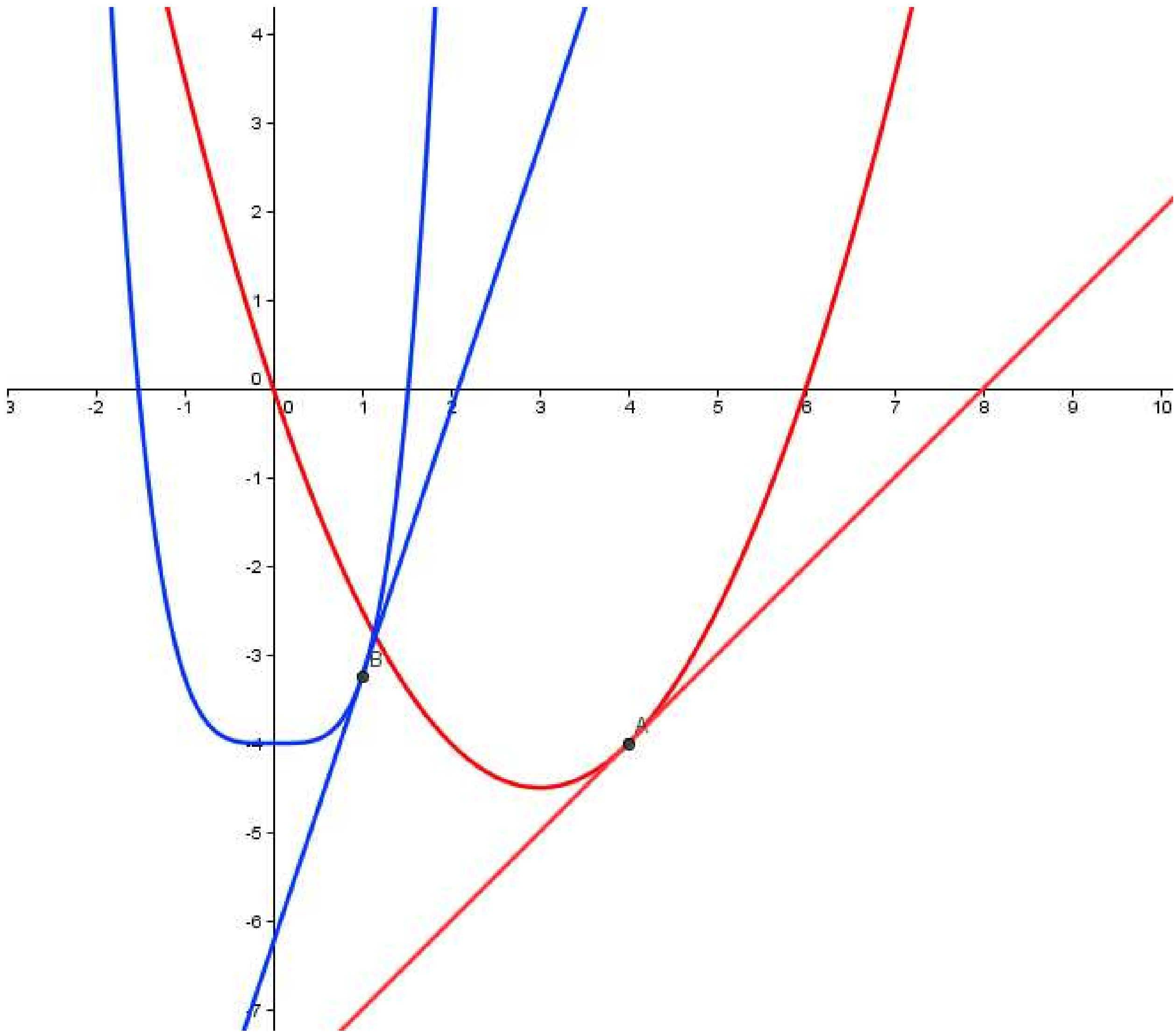
$$(ii) \quad f(1) = \frac{3}{4} \cdot 1^4 - 4 = -3\frac{1}{4} = -3,25$$

$$(iii) \quad Tangente: \; t\left(x\right) = 3x - 6,25$$

$$\text{Rechenweg:} \quad -3,25 = 3 \cdot 1 + b \Rightarrow b = -6,25$$

Die roten Graphen stellen dieTeilaufgabe a) dar,

die blauen Graphen die Teilaufgabe b).



4.) Untersuchung einer ganzrationalen Funktion

Führen Sie bei folgender Funktion $f(x) = \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - x$

eine Untersuchung nach folgenden Kriterien durch:

a) Bestimmen Sie die ersten drei Ableitungen der Funktion.

Lösung:

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - 1 \qquad f''(x) = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3} \qquad f'''(x) = \frac{2}{3}$$

b) Welche Symmetrieeigenschaft besitzt die Funktion? (Begründung!)

Lösung: Es liegt keine Symmetrie vor, da gilt:

$$f(-x) \neq f(x) \quad und \quad f(-x) \neq -f(x)$$

c) Ermitteln Sie die Nullstellen.

Lösung:

$$f(x) = x\left(\frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{3}x - 1\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = 0 \quad \wedge \quad \frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{3}x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x_{2/3} = \frac{\frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{4}{9}}}{\frac{2}{9}} \approx \frac{0,33 \pm 0,75}{0,22}$$

$$\Rightarrow \quad x_2 = 4,89 \quad \wedge \quad x_3 = -1,89$$

d) Berechnen Sie die Extremwerte.

Lösung:

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - 1 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \frac{\frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{4}{3}}}{\frac{2}{3}} = \frac{\frac{2}{3} \pm \frac{4}{3}}{\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = 3 \quad \wedge \quad x_1 = -1$$

$$\Rightarrow \quad f''(3) = \frac{2}{3}\cdot 3-\frac{2}{3} = \frac{4}{3}>0 \quad \Rightarrow \quad Min(3 \mid f(3)) = Min(3 \mid -3)$$

$$\Rightarrow \quad f''(-1) = \frac{2}{3}\cdot(-1)-\frac{2}{3} = -\frac{4}{3}<0$$

$$\Rightarrow \quad Max(-1 \mid f(-1)) = Min\left(-1 \,\middle|\, \frac{5}{9}\right)$$

e) Wo liegen die Wendepunkt(e)?

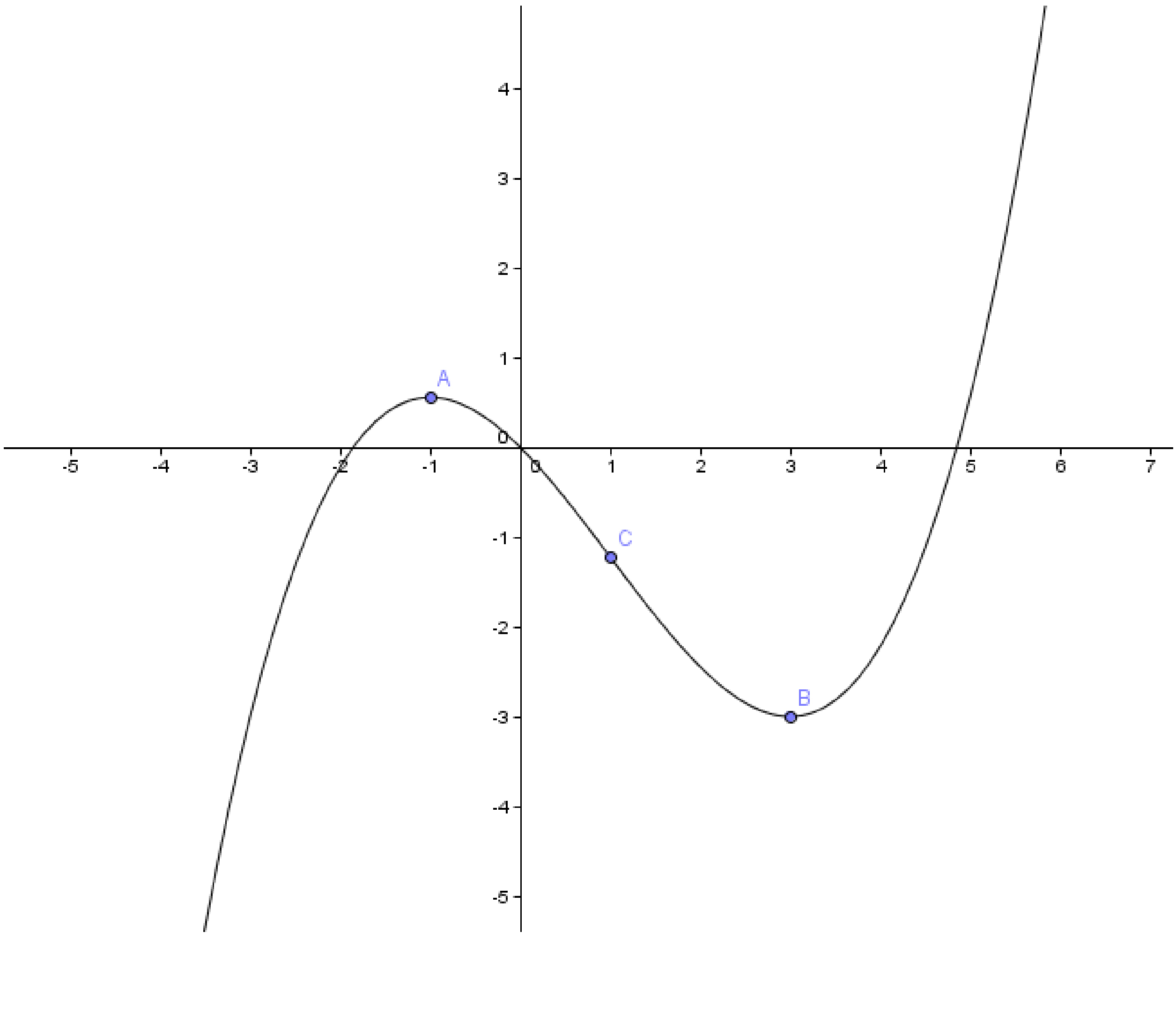
Lösung:

$$f''(x) = \frac{2}{3}x-\frac{2}{3} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1$$

$$\Rightarrow \quad f'''(1) = \frac{2}{3} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad W(1 \mid f(1)) = W\left(1 \,\middle|\, -1\frac{2}{9}\right)$$

f) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion.

Lösung:



h) Wie lauten die Grenzwerte von f(x) für $x \rightarrow \pm\infty$?

Lösung:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{9}x^3-\frac{1}{3}x^2-x\right) \rightarrow \infty$$

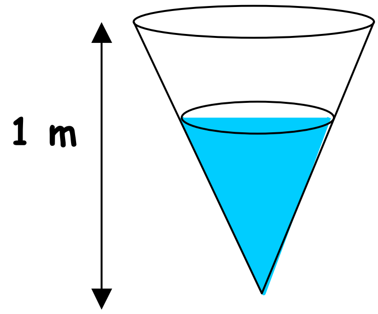
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{9}x^3-\frac{1}{3}x^2-x\right) \rightarrow -\infty$$

5.) Anwendungen zur Kurvendiskussion

Ein kegelförmiger leerer Behälter wird mit Wasser gefüllt.

Der Wasserstand steigt nach der Formel $h(t) = 20\cdot t^{\frac{1}{3}} \quad [t \text{ in Minuten}]$

Die Höhe des Wasserstandes h wird in cm gemessen.



a) Wie hoch steht das Wasser 10 Minuten nach Füllbeginn

Lösung:

$$h(10) = 20\cdot 10^{\frac{1}{3}} = 20\cdot 2{,}1544 = 43{,}09\,[cm]$$

b) Wann ist der Behälter voll?

Lösung:

$$100 = 20\cdot t^{\frac{1}{3}} \xrightarrow{:5} 5 = t^{\frac{1}{3}} \xrightarrow{t^3} t = 125\,[\min] = 2\,[h]\,5\,[\min]$$

c) Wie schnell steigt das Wasser 10 Minuten nach Füllbeginn?

Lösung:

$$h'(t) = \frac{20}{3}\cdot t^{-\frac{2}{3}}$$

$$\xrightarrow{t=10} h'(10) = \frac{20}{3}\cdot 10^{-\frac{2}{3}} = \frac{20}{3}\cdot\frac{1}{10^{\frac{2}{3}}} = 1{,}436\left[\frac{cm}{\min}\right]$$

6.) Fragen zur Differentialrechnung

a) Warum muss zur Ermittlung eines Extremwertes einer Funktion die erste Ableitung mit Null gleichgesetzt werden?

Lösung: Eine Funktion kann nur an den Stellen einen Extremwert besitzen, an denen die Steigung m = 0 gilt;

da die Steigung mittels der ersten Ableitung f'(x) zu bestimmen ist, folgt automatisch die Bedingung:

$$f'(x) = m = 0$$

b) Erklären Sie die Vorgehensweise bei der Produktregel.

Lösung: Ableitung 1. Faktor, die übrigen Faktoren werden ohne abzuleiten

erfasst

+ Ableitung 2. Faktor und Erfassung der übrigen Faktoren

+ Ableitung 3. Faktor ...

Ergebnis:
Das Produkt wird Faktorweise abgeleitet, während die jeweils übrigen Faktoren einfach nochmals hingeschrieben werden

c) Wie müsste die Ableitung von f(x) bei drei Faktoren lauten?

$$f(x) = u(x) \cdot v(x) \cdot w(x)$$

Lösung:

$$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) \cdot w(x) + u(x) \cdot v'(x) \cdot w(x) + u(x) \cdot v(x) \cdot w'(x)$$