Musterlösung **11. Jgst.** **4. Test** **Datum: 21.04.2008**

Klasse: HBF **Fach: Mathematik**

Thema: Stetigkeit; Differentialquotient; Ableitung

Stetigkeit

1.) Erklären Sie den Begriff „Stetigkeit" mit eigenen Worten.

Lösung: Stetigkeit in $x_0 \in [a\,;b]$ liegt vor, wenn gilt:

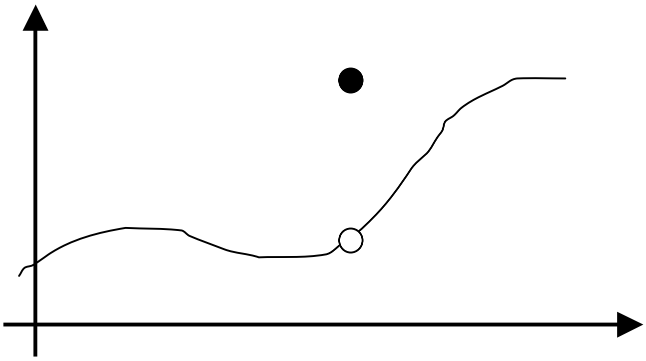
(i) $\lim\limits_{h \to 0} f\left(x_0 + h\right) = \lim\limits_{h \to 0} f\left(x_0 - h\right) = f\left(x_0\right)$ und

(ii) $f\left(x_0\right)\, existiert$

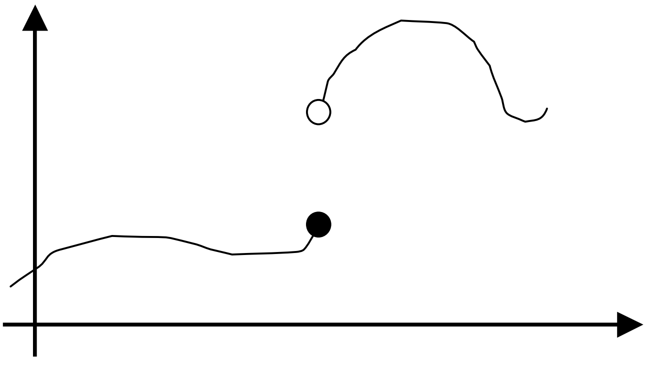
2.) Zeichnen Sie eine stetige und eine nicht stetige Funktion.

Lösung: Beispiele für nicht-stetige Funktionen

Situation 1: links- und rechtseitiger Grenzwert sind identisch, aber der Funktionswert stimmt nicht mit den Grenzwerten überein.



Situation 2: links- und rechtseitiger Grenzwert sind nicht identisch.



3.) Untersuchen Sie folgende Funktionen auf ihre Stetigkeit:

a) $$f(x)=\begin{cases}-0,25x+2 & \text{für } x\le 8\\ -4x+30 & \text{für } x>8\end{cases}$$

Lösung:

$$f(x)=\begin{cases}-0,25x+2 & \text{für } x\le 8\\ -4x+30 & \text{für } x>8\end{cases}$$

$$\text{linke Seite}: \lim_{\substack{x\to 8-h\\ h\to 0}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 8-h\\ h\to 0}}(-0,25x+2)=\lim_{h\to 0}\left[-0,25(8-h)+2\right]=0$$

$$\text{rechte Seite}: \lim_{\substack{x\to 8+h\\ h\to 0}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 8+h\\ h\to 0}}(-4x+30)=\lim_{h\to 0}\left[-4(8+h)+30\right]=-2$$

$f(x)$ *ist nicht stetig.*

b) $$f(x)=\begin{cases}2x^2-4 & \text{für } x<2\\ \frac{1}{4}x^3+2 & \text{für } x\ge 2\end{cases}$$

Lösung:

$$f(x)=\begin{cases}2x^2-4 & \text{für } x<2\\ \frac{1}{4}x^3+2 & \text{für } x\ge 2\end{cases}$$

$$\text{linke Seite}: \lim_{\substack{x\to 2-h\\ h\to 0}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 2-h\\ h\to 0}}\left(2x^2-4\right)=\lim_{h\to 0}\left[2(2-h)^2-4\right]=4$$

$$\text{rechte Seite}: \lim_{\substack{x\to 2+h\\ h\to 0}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 2+h\\ h\to 0}}\left(\frac{1}{4}x^3+2\right)=\lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{4}(2+h)^3+2\right]=4$$

$f(x)$ *ist stetig.*

Differenzierbarkeit

1.) Bilden Sie die Ableitung der Funktion $f(x)=3x^2$ mittels Differentialquotient.

Lösung:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{3(x+h)^2-3x^2}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{3x^2+6hx+3h^2-3x^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h(6x+3h)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}(6x+3h) = 6x$$

2.) Bilden Sie die Ableitungen $f'(x)$ mittels Potenzregel:

a) $f(x)=2x^3-4x+1$ b) $f(x)=ax^4-bx^2+x$

c) $f(x)=3x^{n+2}-5x^n+x^{n-1}$ d) $f(x)=\frac{2}{5}x^6-3x^{-2}$

Lösung:

a) $f(x)=2x^3-4x+1 \xrightarrow{Ableitung} f'(x)=6x^2-4$

b) $f(x)=ax^4-bx^2+x \xrightarrow{Ableitung} f'(x)=4ax^3-2bx+1$

c) $f(x)=3x^{n+2}-5x^n+x^{n-1}$

$\xrightarrow{Ableitung} f'(x)=3(n+2)x^{n+1}-5nx^{n-1}+(n-1)x^{n-2}$

d) $f(x)=\frac{2}{5}x^6-3x^{-2} \xrightarrow{Ableitung} f'(x)=\frac{12}{5}x^5+6x^{-3}$

3.) Welche Steigungen besitzen die Funktionen $f(x)$ an den jeweiligen Stellen?

a) $f(x)=0,4x^3-2x^2+1$ für x = 2

Lösung: $f'(x)=1,2x^2-4x \xrightarrow{einsetzen} f'(2)=-3,2$

b) $f(x)=4x^2-x^{-1}$ für x = - 1

Lösung: $f'(x)=8x+x^{-2} \xrightarrow{einsetzen} f'(-1)=-7$