11. Jgst.	3. Test	Datum:
Klasse: HBF DV		Fach: Mathematik

Themen: **Exponentialfunktionen; Rentenrechnung**

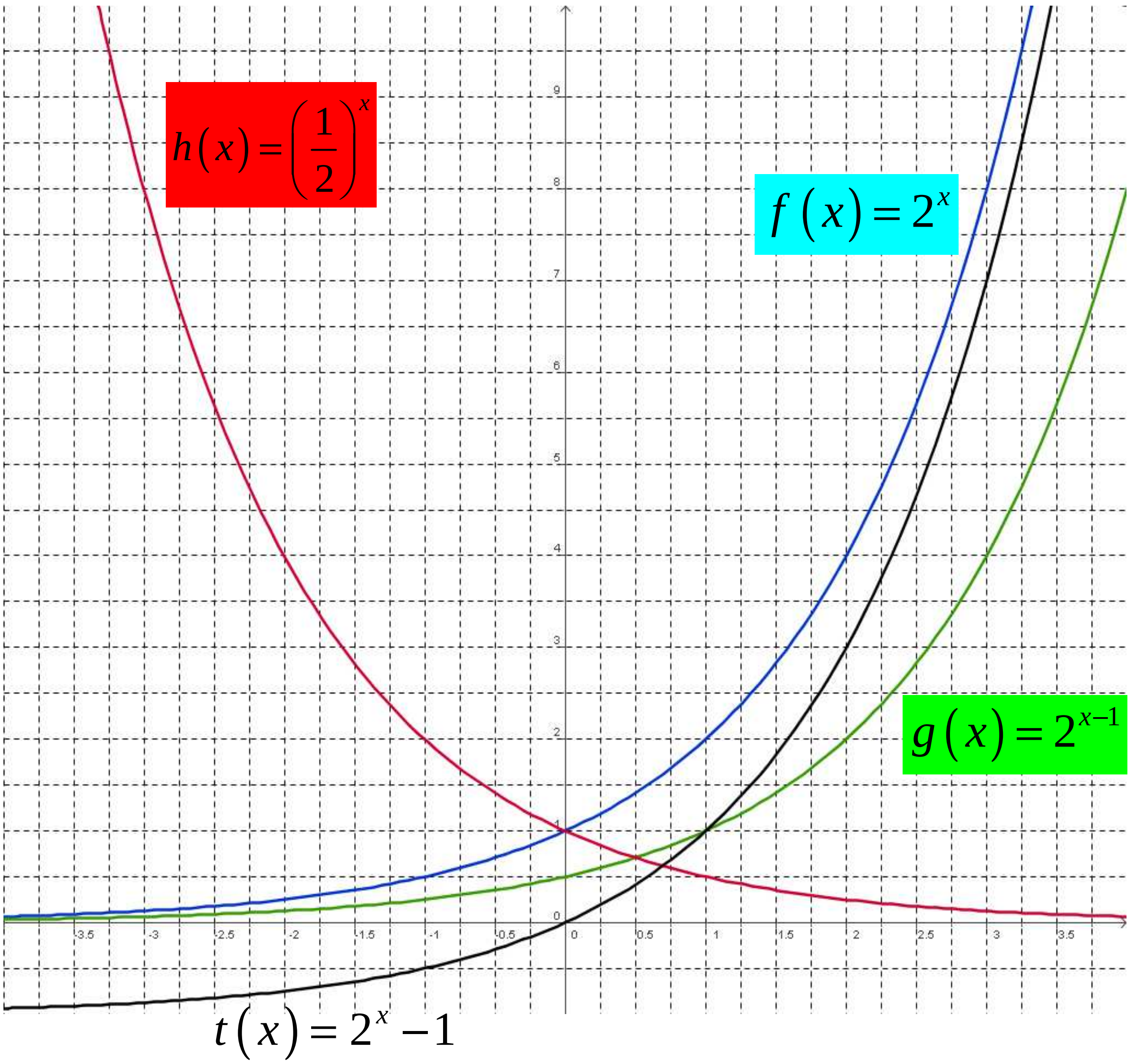
Name:	
Punkte:	Note:

Die Rechenwege müssen nachvollziehbar sein!

1.) Exponentialfunktion I

Ordnen Sie folgende Funktionen den Graphen zu:

$$f(x)=2^x \quad ; \quad g(x)=2^{x-1} \quad ; \quad h(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x \quad ; \quad t(x)=2^x-1$$



2.) Exponentialfunktion II

Landau hatte am 1.1.2007 eine Bevölkerungsanzahl von 43.048.
Das jährliche Wachstum wird mit 2 % veranschlagt.

a) Wie groß ist die Bevölkerungsanzahl im Jahr 2020?

b) Wie groß war die Bevölkerungsanzahl im Jahr 1970?

c) Wann wird Landau die 60.000 Personen-Marke erreicht haben?

d) Angenommen Landau hätte im Jahr 2020 eine Bevölkerungsanzahl von 53.595.
Wie hoch wäre dann der reelle Wachstumsprozentsatz gewesen?

<u>Lösung:</u>

a) $$f(13) = 43.048 \cdot 1{,}02^{13} = 55.687{,}18 \approx 55.687$$

b) $$f(-37) = 43.048 \cdot 1{,}02^{-37} = 20.689{,}34 \approx 20.689$$

$$c) \quad 43.048 \cdot 1{,}02^{x} = 60.000 \xrightarrow{:43.048} 1{,}02^{x} = \frac{60.000}{43.048}$$

$$\xrightarrow{\ln} x = \frac{\ln\left(\frac{60.000}{43.048}\right)}{\ln 1{,}02} \approx 16{,}77 \approx 17\,[Jahre]$$

Im Jahr 2.024 wird Landau etwa 60.000 Einwohner haben.

$$d) \quad 43.048 \cdot a^{13} = 53.595 \xrightarrow{:43.048} a^{13} = \frac{53.595}{43.048}$$

$$\xrightarrow{\sqrt[13]{}} a = \sqrt[13]{\frac{53.595}{43.048}} \approx \sqrt[13]{1{,}245} \approx 1{,}017$$

Durchschnittliches jährliches Wachstum: $1{,}7\ \%$

3.) Rentenrechung I

Ein Kaufmann will seinem 4jährigen Sohn eine Existenz aufbauen; hierzu zahlt er am Ende eines jeden Jahres 1.400,00 € auf ein Sparkonto ein, das mit 5 % verzinst wird.

Welcher Betrag steht dem Sohn im Alter von 18 Jahren zur Verfügung?

<u>Lösung:</u>

Nachschüssige Rentenrechnung: $K_{n\,(nach)} = a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$

$$K_{14\,(nach)} \quad = \quad 1.400,00 \cdot \frac{1,05^{14} - 1}{1,05 - 1} \quad = \quad 27.438,08$$

4.) Rentenrechung II

Welchen Betrag muss ein Kaufmann zu Beginn eines jeden Jahres bei einer Bank einzahlen, um nach acht Jahren bei Berechnung von 5,5 % Zinsen über ein Guthaben von 9.743,45 € verfügen zu können?

<u>Lösung:</u>

Vorschüssige Rentenrechnung: $K_{n\,(vor)} = a \cdot q \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$

$$9.743,45 \quad = \quad a \cdot 1,055 \cdot \frac{1,055^8 - 1}{1,055 - 1}$$

$$\Rightarrow \quad a \quad = \quad \frac{9.743,45 \cdot (1,055 - 1)}{1,055 \cdot (1,055^8 - 1)} \quad = \quad 950,00$$

5.) Rentenrechung III

Wie oft müssen zu Beginn eines jeden Jahres 600,00 € bei einer Bank eingezahlt werden, um bei 4,5 % Zinseszinsen am Ende des letzen Einzahlungsjahres über ein Kapital von 3.430,13 € verfügen zu können?

Lösung:

Vorschüssige Rentenrechnung: $K_{n\,(vor)} = a \cdot q \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$

$$3.430,13 \quad = \quad 600,00 \cdot 1,045 \cdot \frac{1,045^n - 1}{1,045 - 1}$$

$$\Rightarrow \quad 1,045^n \quad = \quad \frac{3.430,13 \cdot (1,045 - 1)}{600,00 \cdot 1,045} + 1$$

$$\Rightarrow \quad \ln 1,045^n \quad = \quad \ln\left[\frac{3.430,13 \cdot (1,045 - 1)}{600,00 \cdot 1,045} + 1\right]$$

$$\Rightarrow \quad n \quad = \quad \frac{\ln\left[\frac{3.430,13 \cdot (1,045 - 1)}{600,00 \cdot 1,045} + 1\right]}{\ln 1,045} \quad = \quad 5\,[Jahre]$$

Rentenrechnung:

	nachschüssig	vorschüssig
Rentenendwert	$K_{n\,(nach)} = a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$	$K_{n\,(vor)} = a \cdot q \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$
Rentenbarwert	$K_{0\,(nach)} = \frac{a}{q^n} \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$	$K_{0\,(vor)} = \frac{a}{q^{n-1}} \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$