Musterlösung **11. Jgst.** **2. Klassenarbeit** **Datum:**

Klasse: HBF DV **Fach: Mathematik**

Themen: **Ganzrationale Funktionen; Scheitelpunktberechnung**

1.) Untersuchung einer ganzrationalen Funktion

Gegeben sei folgende reelle Funktion:

$$f(x) = x^2 + 3x + 1,25$$

a) Ermitteln Sie das Symmetrieverhalten und begründen Sie.
b) Berechnen Sie die Funktionswerte für x = - 1 und x = 2
c) Berechnen Sie die Nullstellen.
d) Wie lautet der Schnittpunkt mit der y-Achse?

Lösung:

a) keine Symmetrie, weil gerade und ungerade Hochzahlen vorliegen.

$$f(-x) = (-x)^2 + 3(-x) + 1,25 = x^2 - 3x + 1,25 \neq f(x) \; und \neq -f(x)$$

b)
$$f(-1) = (-1)^2 + 3\cdot(-1) + 1,25 = -0,75$$
$$f(2) = 2^2 + 3\cdot 2 + 1,25 = 11,25$$

c) Nullstellen: Lösung mittels Formel

$$x_{1/2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-5}}{2} = \frac{-3 \pm 2}{2} \quad \Rightarrow \quad x_1 = -\frac{1}{2} \wedge x_2 = -\frac{5}{2}$$

d) $S_y(0 \mid 1,25)$

2.) Schnittpunkte zwischen Parabel und Gerade

Bestimmen Sie die Schnittpunkte zwischen den Graphen f(x) und g(x):

a) $f(x) = x^2 - 2x - 3 \qquad und \qquad g(x) = 2x + 2$

Lösung:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 2x + 2 \Rightarrow x^2 - 4x - 5 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{16+20}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2} \quad \Rightarrow \quad x_1 = 5 \wedge x_2 = -1 \quad \Rightarrow \quad y_1 = 12 \wedge y_2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad S_1(5 \mid 12) \quad und \quad S_2(-1 \mid 0)$$

b) $f(x)=2x^2+4x-8 \qquad und \qquad g(x)=2x^2-2x+4$

Lösung:

$$f(x) \;=\; g(x) \;\Rightarrow\; 2x^2+4x-8 \;=\; 2x^2-2x+4$$

$$\xrightarrow{-2x^2+2x+8} \;\; 6x \;=12 \;\Rightarrow\; x=2 \;\Rightarrow\; y=8 \;\Rightarrow\; S(2 \mid 8)$$

3.) Ermitteln einer ganzrationalen Funktion von Grad n = 3

Gesucht ist eine Funktion dritten Grades, deren Graph durch die gegebenen Punkte verläuft:

$$A\left(1 \;\middle|\; -\frac{1}{2}\right), B(-2 \mid 16), C(4 \mid 64) \quad und \quad D(0 \mid 0)$$

Anmerkung: $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

Lösung:

Ansatz:

$$\left.\begin{array}{lll} I.) & d=0 & \\ II.) & a+b+c+0 & =-0,5 \\ III.) & -8a+4b-2c+0 & =16 \\ IV.) & 64a+16b+4c+0 & =64 \end{array}\right| \qquad \left.\begin{array}{lll} I.) & d=0 & \\ II.) & a+b+c & =-0,5 \\ III.) & -8a+4b-2c & =16 \\ IV.) & 64a+16b+4c & =64 \end{array}\right|$$

$$\Rightarrow \quad c \;=-0,5-a-b \quad einsetzen\ in\ III.)\ und\ IV.)$$

$$\left.\begin{array}{lll} III.) & -8a+4b-2(-0,5-a-b) & =16 \\ IV.) & 64a+16b+4(-0,5-a-b) & =64 \end{array}\right| \qquad \left.\begin{array}{lll} III.) & -6a+6b & =15 \\ IV.) & 60a+12b & =66 \end{array}\right|$$

$$\xrightarrow{IV.)+10\cdot III.)} \;\; 72b \;=\; 216 \;\Rightarrow\; b=3 \;\Rightarrow\; a=0,5 \;\Rightarrow\; c=-4$$

$$\Rightarrow \quad f(x)=0,5x^3+3x^2-4x$$

4.) Scheitelpunkt einer Brücke

Hier sehen Sie die Brücke Stari Most. Die **Alte Brücke** ist das namensgebende Wahrzeichen der Stadt Mostar in Bosnien-Herzegowina. Sie überspannt die Neretva und verbindet den mehr bosniakisch geprägten Ostteil mit dem stärker kroatisch geprägten Westteil der Stadt. Mit einer Breite von ?? m und ?? m Höhe (im Scheitelpunkt über der Neretva) war sie zur Zeit ihrer Erbauung ein Meisterwerk der Baukunst.

Wie breit und hoch ist eigentlich die Brücke, wenn man von einer Parabelgleichung von $p(x) = -0{,}1x^2 + 2{,}5x$ ausgeht?

Lösung: Ermittlung des Scheitelpunkts mittels quadratischer Ergänzung

$$p(x) = -0{,}1\left[x^2 - 25x + 12{,}5^2 - 12{,}5^2\right]$$

$$p(x) = -0{,}1(x - 12{,}5)^2 + 15{,}625 \quad \Rightarrow \textit{Scheitelpunkt}: \quad S(12{,}5 \mid 15{,}625)$$

$$\textit{Breite der Brücke}: \quad 25\,[m] \quad \textit{und} \quad \textit{Höhe der Brücke}: \quad 15{,}625\,[m]$$

5.) Bestimmen einer Funktionsgleichung höheren Grades

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der ganzrationalen Funktion mit

a) $a_3 = -2 \quad a_2 = 4 \quad a_1 = 1 \quad a_0 = -7$

b) $a_6 = a_4 = 3 \quad a_5 = 2 \quad a_2 = 1 \quad a_1 = a_0 = 2$

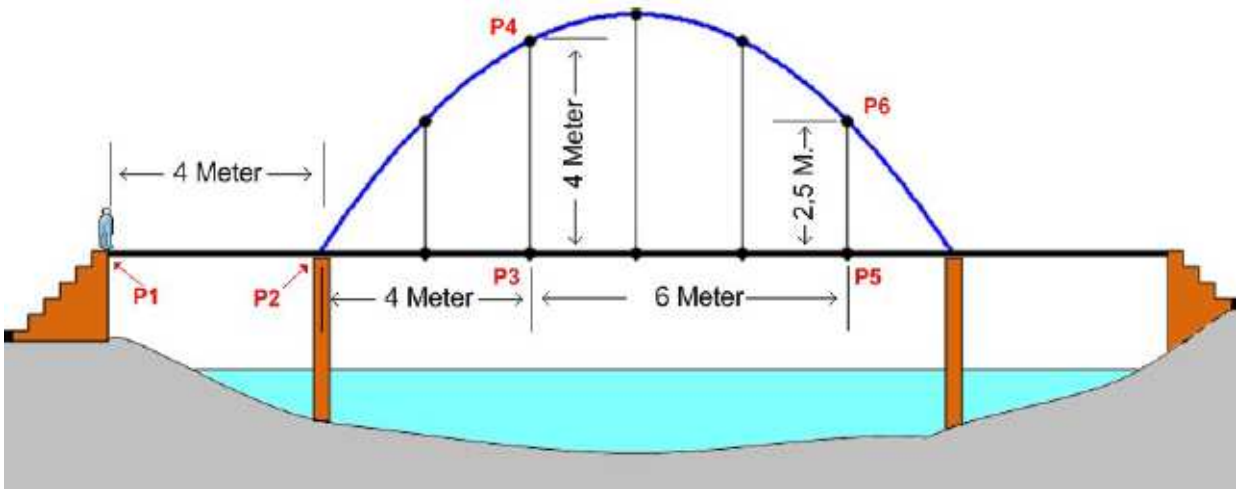
Lösung:

a) $f(x) = -2x^3 + 4x^2 + x - 7$

b) $f(x) = 3x^6 + 2x^5 + 3x^4 + x^2 + 2x + 2$

6.) Parabeln zweiter Ordnung in der Realität

Eine Fußgängerbrücke wird von einem parabelförmigen Brückenbogen getragen.



a) Wie lang ist die gesamt Fußgängerbrücke?

Lösung: **Die Teilabschnitte müssen addiert werden: 4 + 4 + 6 + 2 + 4 = 20**

b) Berechnen Sie die Gleichung des Brückenbogens

anhand der Punkte **P2**, **P4** und **P6**.

Wählen Sie die Lage des Koordinatensystem geschickt!

Lösung:

$$P_2(0 \mid 0); P_4(4 \mid 4) \quad und \quad P_6(10 \mid 2{,}5) \quad mit \quad f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$I.) \quad c = 0 \qquad II.) \quad 16a + 4b = 4 \qquad III.) \quad 100a + 10b = 2{,}5$$

$$\xrightarrow{5 \cdot II - 2 \cdot III} \quad -120a = 15 \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{15}{120} = -\frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow \quad b = \frac{3}{2} \qquad \Rightarrow \quad f(x) = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{2}x$$

7.) Funktionswerte mit dem Horner-Schema

Berechnen Sie die Funktionswerte mit Hilfe des Horner-Schemas.

a) $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x - 1$

für x = - 2 und x = 3

	x4	x3	x2	x1	x0	
f(x) =	2,00	-3,00	2,00	-1,00	-1,00	
x0	a(4)	a(3)	a(2)	a(1)	a(0)	
	2,00	-3,00	2,00	-1,00	-1,00	
-2	0,00	-4,00	14,00	-32,00	66,00	
	2,00	-7,00	16,00	-33,00	65,00	f(x0)

	x4	x3	x2	x1	x0	
f(x) =	2,00	-3,00	2,00	-1,00	-1,00	
x0	a(4)	a(3)	a(2)	a(1)	a(0)	
	2,00	-3,00	2,00	-1,00	-1,00	
3	0,00	6,00	9,00	33,00	96,00	
	2,00	3,00	11,00	32,00	95,00	f(x0)

b) $g(x) = 2x^5 - 2x^3 + 7x - 2$

für x = - 3 und x = 2

	x5	x4	x3	x2	x1	x0	
f(x) =	2,00	0,00	-2,00	0,00	7,00	-2,00	
x0	a(5)	a(4)	a(3)	a(2)	a(1)	a(0)	
	2,00	0,00	-2,00	0,00	7,00	-2,00	
-3		-6,00	18,00	-48,00	144,00	-453,00	
	2,00	-6,00	16,00	-48,00	151,00	-455,00	f(x0)

	x5	x4	x3	x2	x1	x0	
f(x) =	2,00	0,00	-2,00	0,00	7,00	-2,00	
x0	a(5)	a(4)	a(3)	a(2)	a(1)	a(0)	
	2,00	0,00	-2,00	0,00	7,00	-2,00	
2		4,00	8,00	12,00	24,00	62,00	
	2,00	4,00	6,00	12,00	31,00	60,00	f(x0)

8.) Symmetrie

Erklären Sie die Begriffe Punkt- und Achsensymmetrie.

Lösung:

Achsensymmetrie: Spiegelung an der y-Achse $f(x) = f(-x)$

Punktsymmetrie: Spiegelung am Ursprung $-f(x) = f(-x)$