Musterlösung **11. Jgst.** **1. Klassenarbeit** **Datum: 25.09.2007**

Klasse: HBF **Fach: Mathematik**

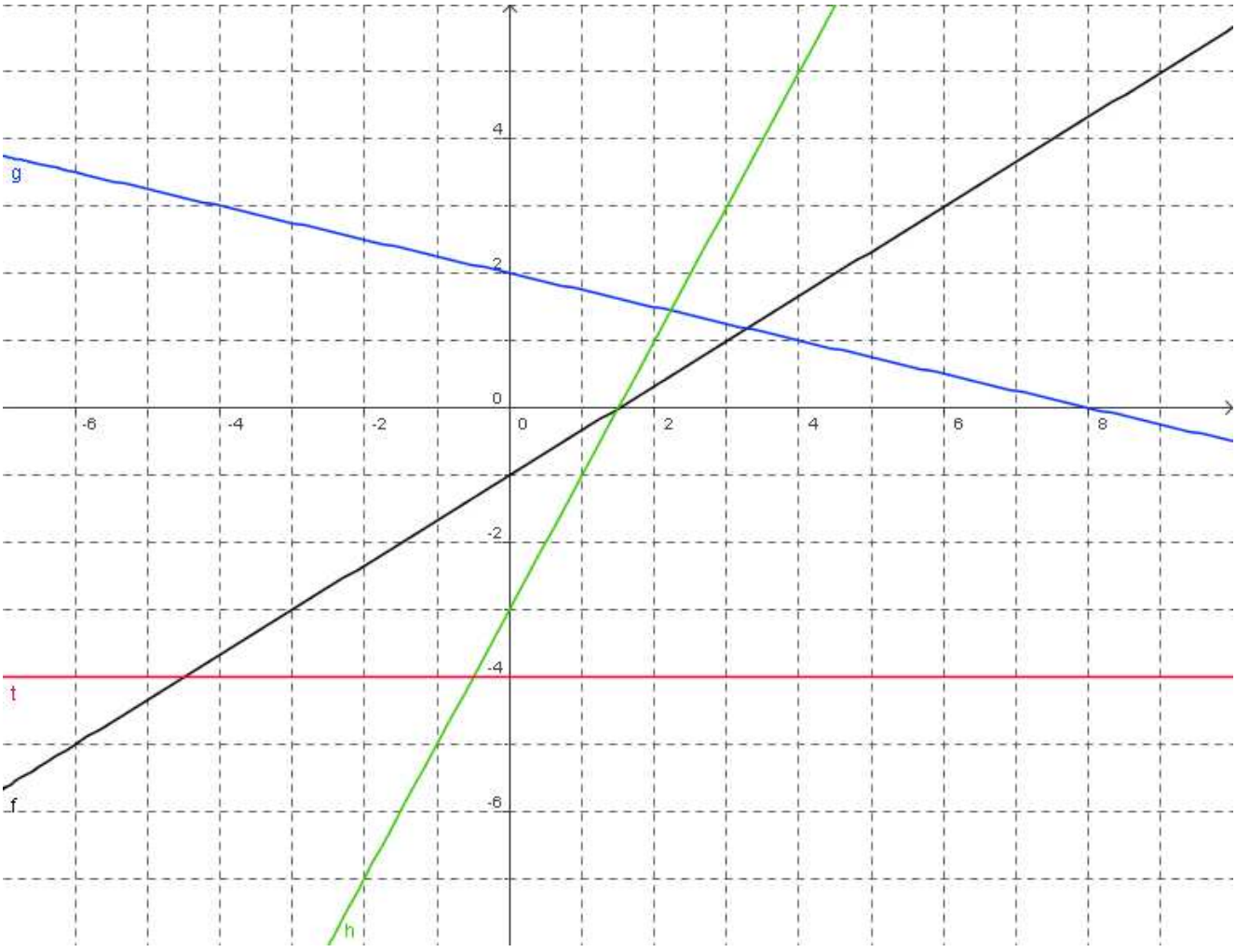
Themen: **Grundlagen Funktionen; Lineare/Quadratische Funktionen**

1.) Zeichnen Sie folgende lineare Funktionen in ein Koordinatensystem.

a) $f(x) = \frac{2}{3}x - 1$ b) $g(x) = -\frac{1}{4}x + 2$

c) $h(x) = 2x - 3$ d) $t(x) = -4$

Lösung:



2.) Die Punkte P und Q liegen auf der Geraden $f(x) = -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}$.

Bestimmen Sie die fehlenden Koordinaten.

a) $P(-4 \mid ?)$ b) $P(? \mid -8)$

Lösung:

$$f(-4) = -\frac{3}{5}\cdot(-4)+\frac{4}{5} = \frac{16}{5} = 3,2$$

$$-8 = -\frac{3}{5}x+\frac{4}{5} \xrightarrow{-\frac{4}{5}} -\frac{44}{5} = -\frac{3}{5}x \xrightarrow{\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)} x = \frac{44}{3} = 14\frac{2}{3}$$

3.) Erstellen Sie die Geradengleichung:

a) $m=\frac{1}{3}$ *und* $P(-1\,|\,-2)$

b) $P(2\,|\,-1)$ *und* $Q\left(\frac{1}{4}\,\middle|\,\frac{3}{5}\right)$

c) Die Gerade geht durch den Punkt $P(-1\,|\,3)$ und verläuft **senkrecht** zu $f(x) = 2x-\frac{1}{2}$

d) Die Gerade ist eine Ursprungsgerade und verläuft durch den Punkt $P(-2\,|\,-3)$

Lösung:

$a)$ $-2 = \frac{1}{3}\cdot(-1)+b \Rightarrow b=-\frac{5}{3} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{3}x-\frac{5}{3}$

$b)$

$$m = \frac{-1-\frac{3}{5}}{2-\frac{1}{4}} = -\frac{32}{35}$$

$$-1 = \left(-\frac{32}{35}\right)\cdot 2+b \Rightarrow b=\frac{29}{35} \Rightarrow f(x) = -\frac{32}{35}x+\frac{29}{35}$$

$c)$ $m = -\frac{1}{2} \Rightarrow 3 = \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(-1)+b \Rightarrow b=\frac{5}{2} \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$

$d)$ $m = \frac{3}{2}$ *und* $b = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{3}{2}x$

4.) Schnittpunktbestimmung

Berechnen Sie den Schnittpunkt zwischen den Geraden

$$f(x) = -\frac{1}{2}x+2 \quad und \quad g(x) = -\frac{5}{2}x+\frac{1}{4}$$

Lösung:

$$Ansatz: \quad f(x) = g(x)$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{2}x+2 = -\frac{5}{2}x+\frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{7}{8} \quad \Rightarrow \quad f\left(-\frac{7}{8}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{7}{8}\right)+2 = \frac{39}{16}$$

$$\Rightarrow \quad S\left(-\frac{7}{8} \mid \frac{39}{16}\right)$$

5.) **Die Regentonne**

Eine Regentonne ist 90 cm hoch. Sie wird mit einem Schlauch gefüllt, aus dem gleichmäßig Wasser fließt. Nach 4 min. steht das Wasser 44 cm, nach 7 min. 62 cm hoch.

a) Wann ist die Regentonne voll?

Lösung:

$$2\,Punkte: \quad P(4 \mid 44) \quad und \quad Q(7 \mid 62)$$

$$m = \frac{62-44}{7-4} = \frac{18}{3} = 6$$

$$Geradengleichung: \quad f(x) = mx+b \quad \Rightarrow \quad 44 = 6\cdot 4+b \quad \Rightarrow \quad b = 20$$

$$\text{Füllfunktion}: \quad f(x) = 6x+20$$

$$\Rightarrow \quad 90 = 6x+20 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{70}{6}[\min] = 11\frac{2}{3}[\min] = 11[\min]\,40[sek]$$

b) Welchen Wasserstand hatte die Regentonne zu Beginn?

Lösung: $\text{Füllfunktion}: \quad f(x) = 6x+20$

Zu Beginn war die Regentonne mit 20 cm gefüllt; Ansatz: f(0)

6.) Die Gerade h(x) verläuft durch die Punkte $A(-1 \mid 4)$ *und* $B(3 \mid 1)$:

a) Berechnen Sie die Mittelpunktkoordinaten zwischen A und B.

Lösung:

$$x_M = \frac{-1+3}{2} = 1 \qquad y_M = \frac{4+1}{2} = \frac{5}{2} \quad \Rightarrow \quad M\left(1 \,\middle|\, \frac{5}{2}\right)$$

b) Ermitteln Sie die Länge von A nach B.

Lösung:

$$d = \sqrt{(-1-3)^2+(4-1)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

c) Berechnen Sie die Gleichung der Mittelsenkrechten auf die Seite $\overline{AB}$?

Lösung:

$$m = \frac{4-1}{-1-3} = -\frac{3}{4} \xrightarrow{m_1 \cdot m_2 = -1} m_{senkrecht} = \frac{4}{3}$$

$$1 = \frac{4}{3}\cdot 3 + b \quad \Rightarrow \quad b = -3 \quad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{4}{3}x - 3$$

d) Die Gerade h(x) und g(x) mit $g(x) = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}$ bilden mit der y-Achse ein Dreieck.

=> Berechnen Sie die Gerade h(x)

=> Berechnen Sie den Schnittpunkt zwischen g(x) und h(x).

=> Fertigen Sie eine Zeichnung an.

=> Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks.

Lösung:

Gerade h(x):

$$m = -\frac{3}{4} \xrightarrow{einsetzen} 1 = \left(-\frac{3}{4}\right)\cdot 3 + b \quad \Rightarrow \quad b = \frac{13}{4} \quad \Rightarrow \quad h(x) = \left(-\frac{3}{4}\right)x + \frac{13}{4}$$

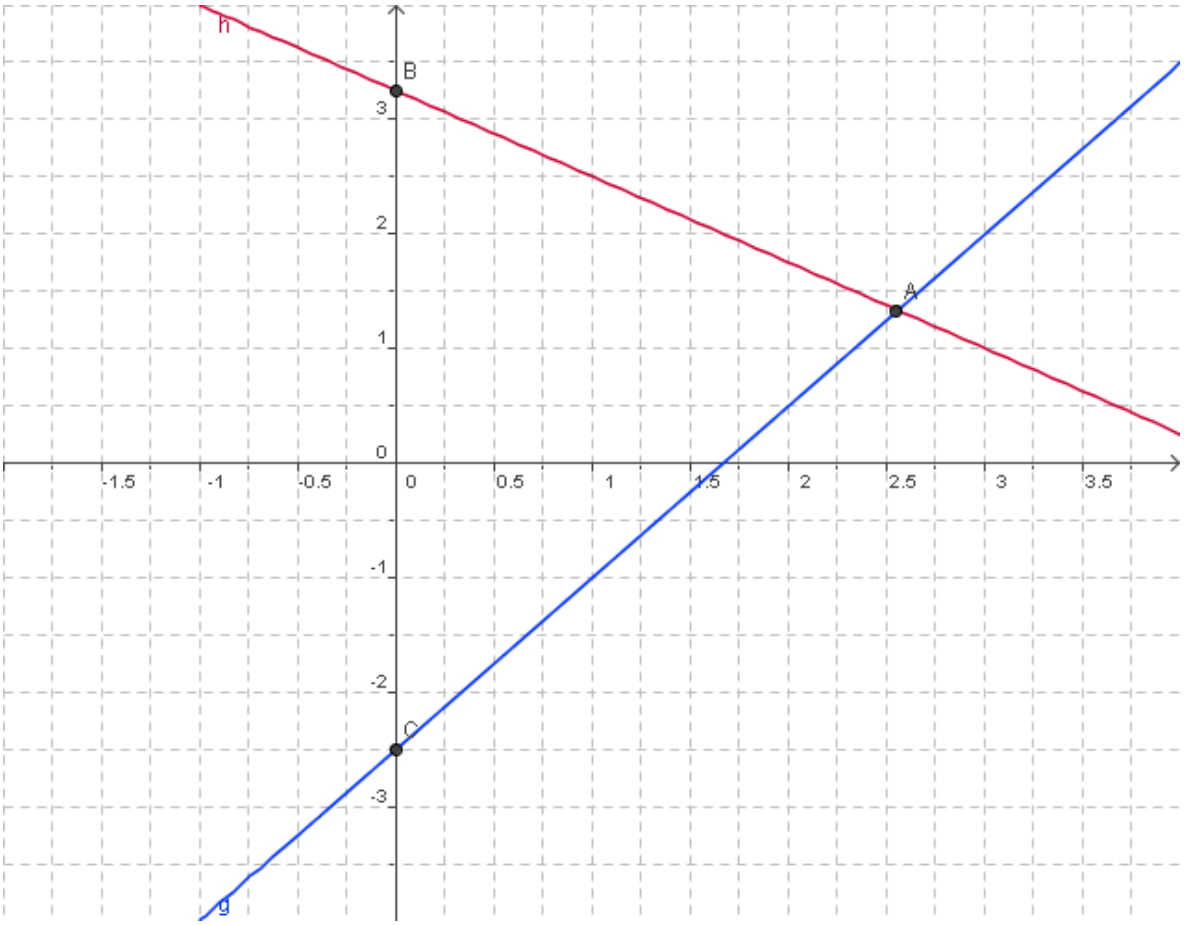
Schnittpunkt:

$$g(x) = h(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{2}x - \frac{5}{2} = \left(-\frac{3}{4}\right)x + \frac{13}{4} \quad \Rightarrow \quad \frac{9}{4}x = \frac{23}{4} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{23}{9}$$

$$g\left(\frac{23}{9}\right) = \frac{3}{2}\cdot\frac{23}{9} - \frac{5}{2} = \frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad S\left(\frac{23}{9} \,\middle|\, \frac{4}{3}\right)$$

Fläche:

$$A = \frac{1}{2} g \cdot h \xrightarrow{\text{einsetzen}} \frac{1}{2}\left[\frac{13}{4} - \left(-\frac{5}{2}\right)\right] \cdot \frac{23}{9} = \frac{23}{8} \cdot \frac{23}{9} = \frac{529}{72} \approx 7{,}347$$



7.) Geraden mit Parameter

Gegeben ist die Geradenschar $f_t(x) = \frac{t}{2}x + 2t \quad mit \quad t \in \Re$

a) Welchen Wert müsste t annehmen, damit der y-Achsenabschnitt den Wert 3 besitzt?

b) Welchen Wert müsste t annehmen, damit die Steigung m = 2 lautet?

c) Für welchen t-Wert verläuft die Gerade parallel zur x-Achse?

d) Für welchen Wert von t verläuft die Gerade durch den Punkt $P\left(-2 \,\middle|\, \frac{3}{34}\right)$?

Lösung:

$a)\quad 2t = 3 \Rightarrow t = \frac{3}{2}$

$b)\quad \frac{t}{2} = 2 \Rightarrow t = 4$

$$c)\quad m = 0 \Rightarrow \frac{t}{2} = 0 \Rightarrow t = 0$$

$$d)\quad \frac{3}{34} = \frac{t}{2}\cdot(-2) + 2t \Rightarrow \frac{3}{34} = t$$

8.) Das Produktionsproblem

Zwei Produktionsverfahren werden diskutiert:

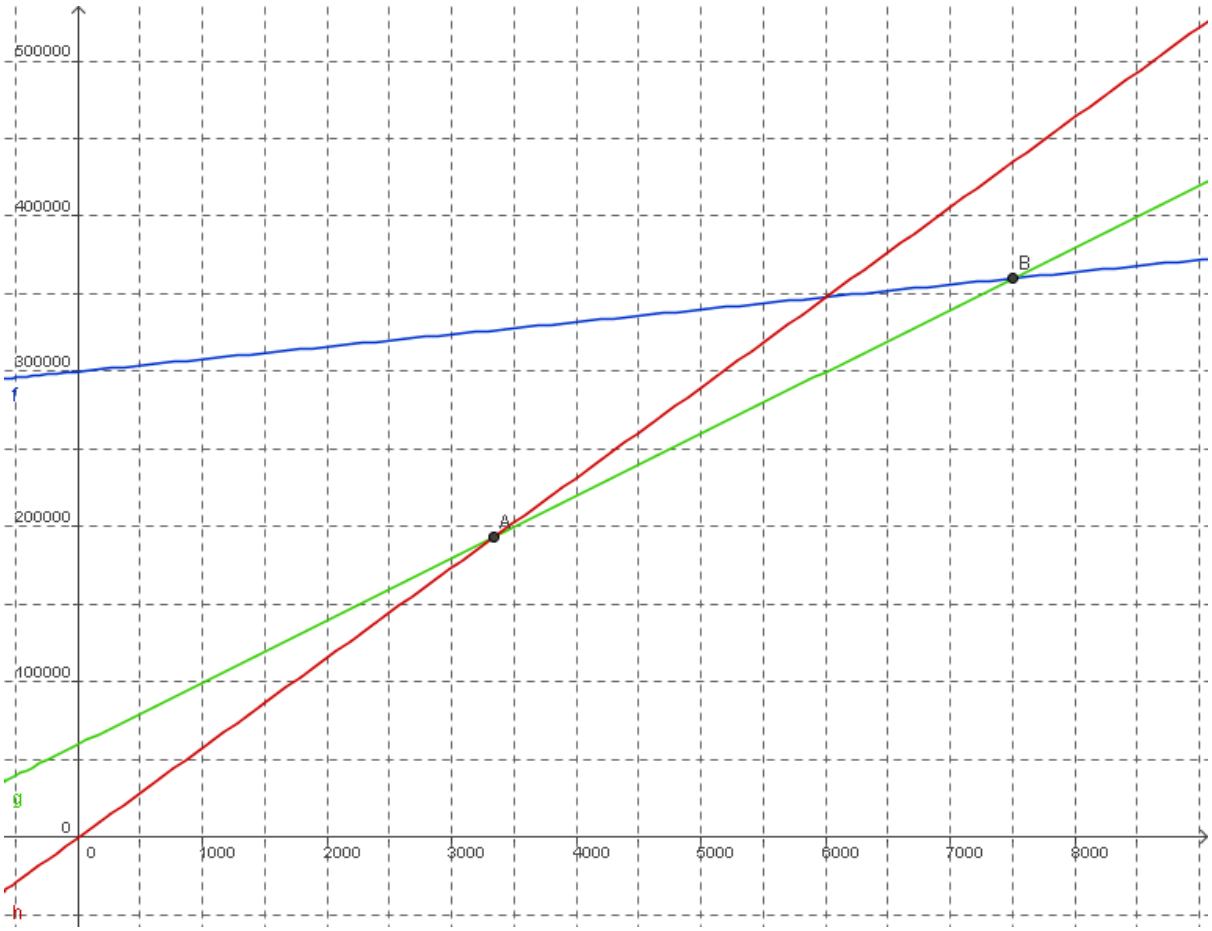
Verfahren A mit computergesteuerten Maschinen, bei dem 300.000,00 € fixe Kosten und 8,00 € variable Stückkosten anfallen;
Verfahren B mit handgesteuerten Maschinen, bei dem 60.000,00 € fixe Kosten und 40,00 € variable Stückkosten anfallen;
zudem haben wir ein externes Angebot: Stückkosten: 58,00 €.

a) Stellen Sie die Funktionsterme auf.

Lösung:

$$f_A(x) = 8x + 300.000 \qquad f_B(x) = 40x + 60.000 \qquad f_{extern}(x) = 58x$$

b) Zeichnen Sie die Funktionsterme in ein Koordinatensystem.



c) Bei welcher Stückzahl wären die Verfahren A und B kostengleich?

Lösung:

$$Ansatz: \quad f_A(x) = f_B(x)$$

$$\Rightarrow \quad 8x + 300.000 = 40x + 60.000 \quad \Rightarrow \quad x = 7.500\,[Stück]$$

d) Bis zu welcher Stückzahl sollten wir das externe Angebot wählen?

Lösung:

$$Ansatz: \quad f_B(x) = f_{extern}(x)$$

$$\Rightarrow \quad 40x + 60.000 = 58x \quad \Rightarrow \quad x = 3.333,33\,[Stück]$$

Produktionsentscheidung:

$[0\,;3.333]$	*externer Anbieter*
$[3.334\,;7.500]$	*Verfahren B*
$[7.501\,;\infty]$	*Verfahren A*

9.) Graphen zu quadratischen Funktionen

Zeichnen Sie ausgehend von der Normalparabel f(x) = x^2 folgende Parabeln und **erklären** Sie die Veränderungen:

a) $f(x) = x^2 - 2$ b) $f(x) = x^2 + 1$

c) $f(x) = (x-3)^2$ d) $f(x) = (x+2)^2$

Lösung:

Erklärung:

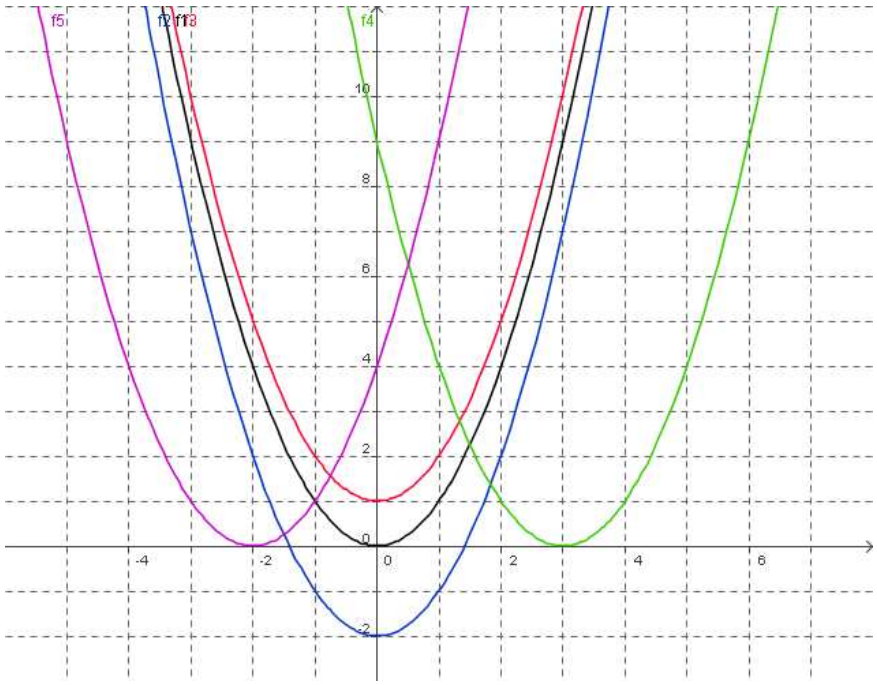
a) Scheitelpunkt der Normalparabel wird um 2 Einheiten nach unten entlang der y-Achse verschoben.

b) Scheitelpunkt der Normalparabel wird um eine Einheit nach oben entlang der y-Achse verschoben.

c) Scheitelpunkt der Normalparabel wird um 3 Einheiten nach rechts entlang der x-Achse verschoben.

d) Scheitelpunkt der Normalparabel wird um 2 Einheiten nach links entlang der x-Achse verschoben.

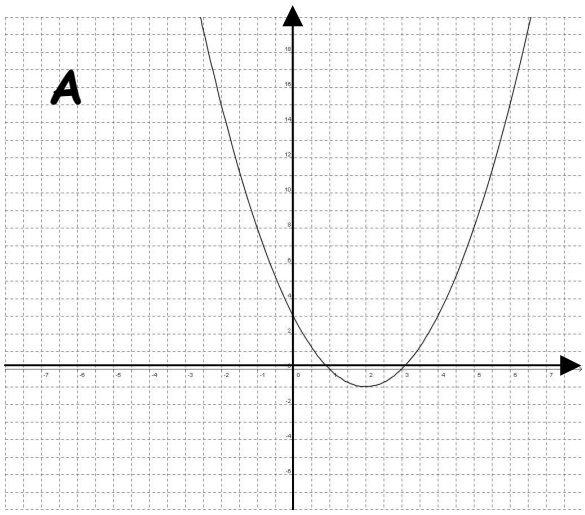
Graphen:

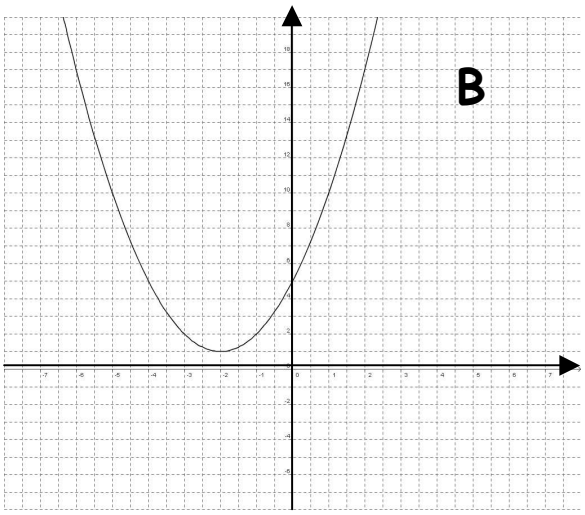


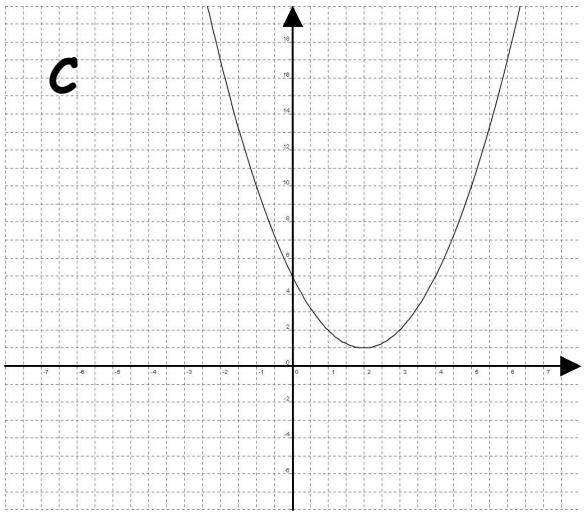
10.) Graphen zu quadratischen Funktionen

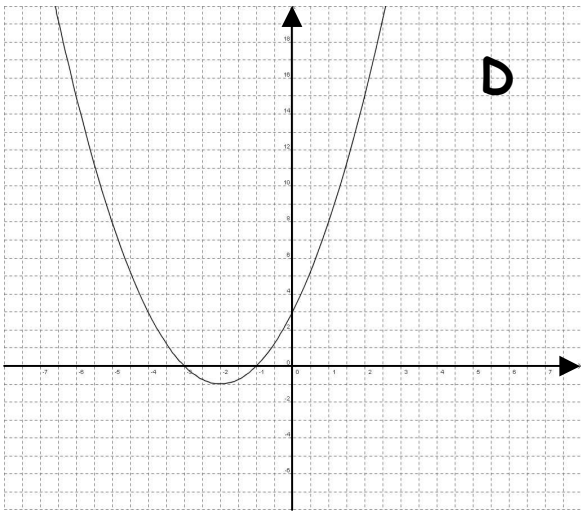
Gegeben sind 4 Schaubilder quadratischer Funktionen. Ordnen Sie den nachstehenden Funktionsterm zu und begründen Sie Ihre Entscheidung.

$$f(x) = (x-2)^2 + 1$$







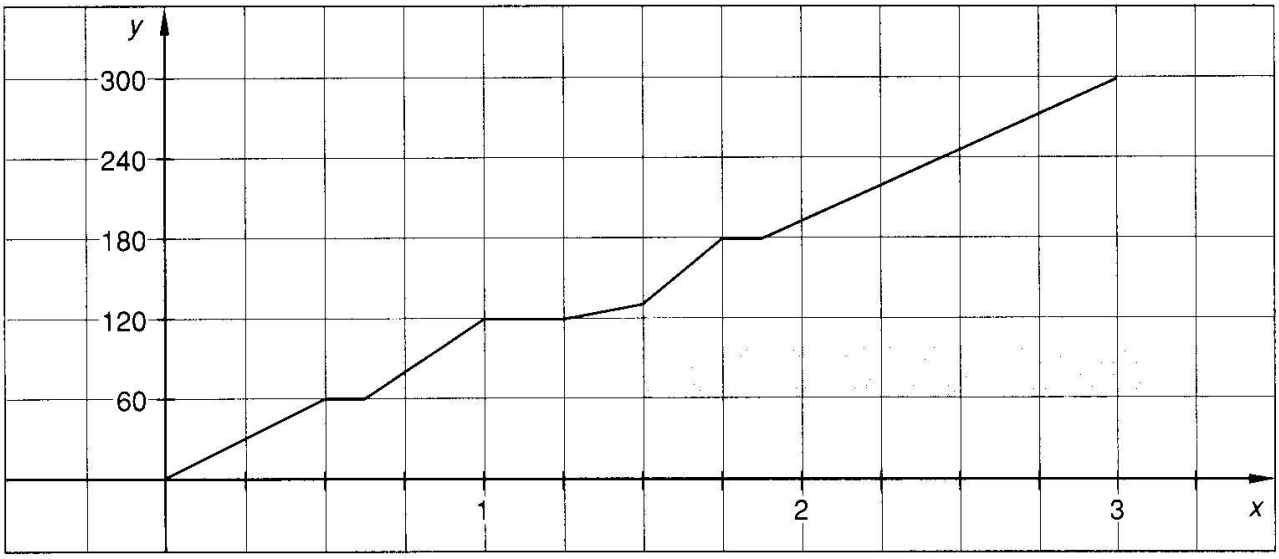


Lösung:

Die Zeichnung C ist der richtige Graph der Funktion, da hier der Scheitelpunkt um 2 Einheiten nach rechts und eine Einheit nach oben verschoben wurde.

11.) Der Fahrplan

Der nachfolgende Graph stellt die Fahrt eines Inter-Regios der Deutschen Bahn AG dar, wobei sich die Fahrzeit auf der x-Achse auf Stunden, der Fahrweg auf der y-Achse auf km bezieht. Es wird angenommen, dass der Zug nur an Bahnhöfen hält.



a) An wie vielen Bahnhöfen hält der Zug?

b) Stellen Sie einen Fahrplan für den Zug auf und bezeichnen Sie die Bahnhöfe mit B_1, B_2 usw.
Abfahrtszeitpunkt ist 12.00 Uhr.

Lösung:

a) Es sind insgesamt 5 Bahnhöfe.

b)

Bahnhof	**Ankunft**	**Abfahrt**
B_1	---	12.00
B_2	12.30	12.37
B_3	13.00	13.15
B_4	13.45	13.52
B_5	15.00	---

Ergänzungen für HBF DV:

3.) Erstellen Sie die Geradengleichung:

b) $P(2 \mid -1) \quad und \quad Q\left(\frac{1}{2} \mid \frac{1}{3}\right)$

Lösung:

$$m = \frac{-1-\frac{1}{3}}{2-\frac{1}{2}} = -\frac{\frac{4}{3}}{\frac{3}{2}} = -\frac{8}{9}$$

$$-1 = \left(-\frac{8}{9}\right)\cdot 2 + b \Rightarrow b = \frac{7}{9} \Rightarrow f(x) = -\frac{8}{9}x + \frac{7}{9}$$

4.) Schnittpunktbestimmung

Berechnen Sie den Schnittpunkt zwischen den Geraden

$$f(x) = -\frac{1}{2}x + 2,25 \quad und \quad g(x) = -\frac{5}{2}x + \frac{1}{4}$$

Lösung:

$$Ansatz: \quad f(x) = g(x)$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}x + 2,25 = -\frac{5}{2}x + \frac{1}{4} \Rightarrow x = -1$$

$$\Rightarrow f(-1) = \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(-1) + 2,25 = 2,75$$

$$\Rightarrow S(-1 \mid 2,75)$$

7.) Scheitelpunkt bei quadratischen Funktionen

a) Ermitteln Sie den Scheitelpunkt der Funktion

$$f(x) = x^2 - 4x + 6$$

b) Nun soll der Scheitelpunkt der folgenden Funktion berechnet werden:

$$f(x) = -3x^2 - 9x + 12$$

Lösung:

a)

$$f(x) = x^2 - 4x + 6 = x^2 - 4x + 2^2 - 2^2 + 6 = (x-2)^2 + 2$$

$$\Rightarrow \quad S(2 \mid 2)$$

b)

$$f(x) = -3x^2 - 9x + 12$$

$$f(x) = -3\left(x^2 + 3x - 4\right)$$

$$f(x) = -3\left[x^2 + 3x + 1{,}5^2 - 1{,}5^2 - 4\right]$$

$$f(x) = -3\left[(x+1{,}5)^2 - 6{,}25\right]$$

$$f(x) = -3(x+1{,}5)^2 + 18{,}75$$

$$\Rightarrow \quad S(-1{,}5 \mid 18{,}75)$$