Musterlösung **12. Jgst.** **3. Klassenarbeit** **Datum: 25.02.2008**

Klasse: HBF **Fach: Mathematik**

Thema: Kurvendiskussion ganzrat. Funktionen; Extremwertaufgaben; Integralrechnung

---

1.) Integrale - Stammfunktionen

Bilden Sie zu folgenden Funktionen die Stammfunktion:

a) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^3$

Lösung: $F(x) = \frac{1}{10}x^5 - \frac{1}{2}x^4 + c$

b) $f(x) = \frac{3}{2}x^3 - \frac{4}{5}x^2 + 4$

Lösung: $F(x) = \frac{3}{8}x^4 - \frac{4}{15}x^3 + 4x + c$

c) $f(x) = 5x^2 - 4x + 2$

Lösung: $F(x) = \frac{5}{3}x^3 - 2x^2 + 2x + c$

d) $f(x) = -x^n + 3x^{n-2}$

Lösung: $F(x) = -\frac{1}{n+1}x^{n+1} + \frac{3}{n-1}x^{n-1} + c$

2.) Flächenberechnung

Ermitteln Sie die Fläche unter Kurve $f(x) = \frac{1}{4}x^3$ im Intervall $I = [2;5]$.

Lösung: $\int_2^5 \frac{1}{4}x^3 dx = \left[\frac{1}{16}x^4\right]_2^5 = \frac{1}{16}\left(5^4 - 2^4\right) = 38\frac{1}{16}$

3.) Extremwertaufgabe I

Sie haben einen Zaun mit der Länge von 200 m zur Verfügung und dürfen damit ein rechteckiges Grundstück entlang einer Mauer abgrenzen.

Welches ist seine maximale Fläche und wie lang sind die Seiten?

Lösung:

$$\textit{Zielfunktion}: \quad A(a,b) = a \cdot b$$

$$\textit{Nebenbedingung}: \quad 200 = 2a + b \Rightarrow b = 200 - 2a$$

$$\textit{NB eingesetzt}: \quad A(a) = a \cdot (200 - 2a) = 200a - 2a^2$$

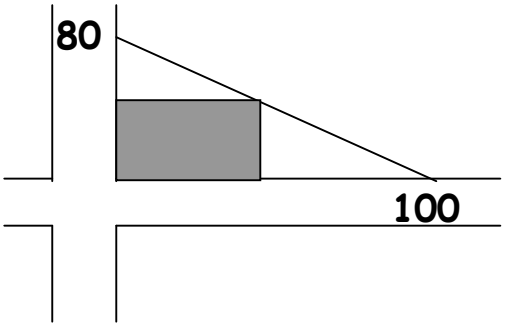
$$A'(a) = 200 - 4a = 0 \Rightarrow a = 50$$

$$A''(a) = -4 < 0 \Rightarrow \textit{Maximum}$$

$$\Rightarrow b = 100 \Rightarrow A = 50 \cdot 100 = 5.000$$

4.) Extremwertaufgabe II

Wie groß ist die maximale Fläche?



Lösung:

$$\textit{Randfunktion}: \quad f(x) = -\frac{4}{5}x + 80 \Leftrightarrow \textit{Nebenbedingung}$$

$$\textit{Zielfunktion}: \quad A(x, f(x)) = x \cdot f(x)$$

$$\textit{NB eingesetzt}: \quad A(x) = x \cdot \left(-\frac{4}{5}x + 80\right) = -\frac{4}{5}x^2 + 80x$$

$$A'(x) = -\frac{8}{5}x + 80 = 0 \Rightarrow x = 50$$

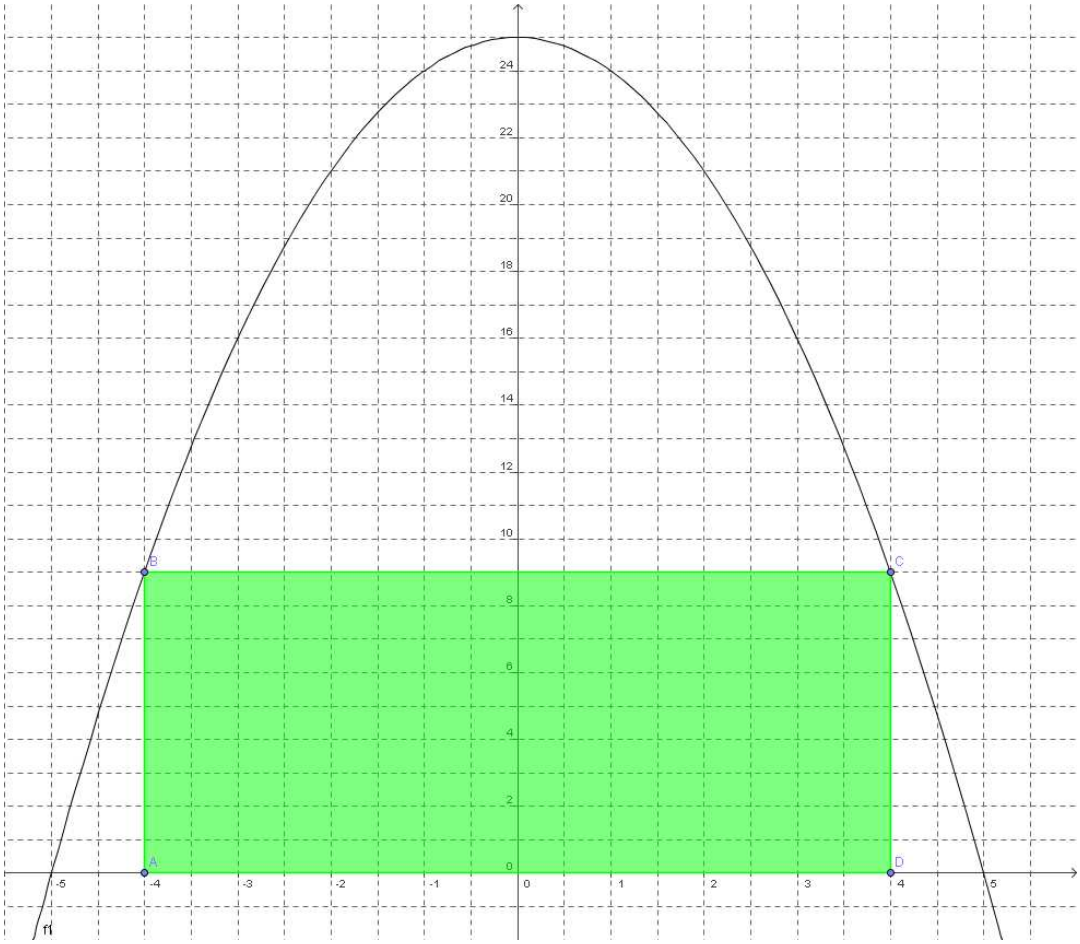
$$A''(x) = -\frac{8}{5} < 0 \Rightarrow \textit{Maximum}$$

$$\Rightarrow f(50) = 40 \Rightarrow A = 50 \cdot 40 = 2.000$$

5.) Extremwertaufgabe III

Ermitteln Sie die maximal mögliche Fläche unter der Funktion

$$f(x) = 25 - x^2$$



Lösung:

Randfunktion: $f(x) = 25 - x^2 \Leftrightarrow$ *Nebenbedingung*

Zielfunktion: $A(x, f(x)) = x \cdot f(x)$

NB eingesetzt: $A(x) = 2 \cdot x \cdot (25 - x^2) = 50x - 2x^3$

$$A'(x) = 50 - 6x^2 = 0 \Rightarrow |x| = \sqrt{\frac{25}{3}}$$

$$A''(x) = -12x \Rightarrow A''\left(\sqrt{\frac{25}{3}}\right) = -12 \cdot \sqrt{\frac{25}{3}} < 0 \Rightarrow \textit{Maximum}$$

$$\Rightarrow f\left(\sqrt{\frac{25}{3}}\right) = \frac{50}{3} \Rightarrow A = 2 \cdot \sqrt{\frac{25}{3}} \cdot \frac{50}{3} = 96,23$$

6.) Untersuchung einer ganzrationalen Funktion

Führen Sie bei folgender Funktion $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3$

eine Untersuchung nach folgenden Kriterien durch:

a) Symmetrie
b) Nullstellen
c) Extremwerte
d) Wendepunkte
e) Skizze der Funktion
f) Ermitteln Sie die Funktionsgleichung der Tangente in x = 3.

Lösung:

a) keine Symmetrie, da gerade und ungerade Hochzahlen vorliegen.

b) $x^3\left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0\,(dreifach) \wedge x_2 = 2$

c)

$$f'(x) = x^2\left(x - \frac{3}{2}\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \wedge x_2 = \frac{3}{2}$$

$$f''(x) = 3x^2 - 3x \Rightarrow f''\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} > 0 \Rightarrow Min\left(\frac{3}{2} \,\middle|\, -0,42\right)$$

x=0 ist keine Extremwertstelle, da sie als dreifache Nullstelle vorliegt.

d)

$$f''(x) = 3x(x-1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \wedge x_2 = 1$$

$$f'''(x) = 6x - 3$$

$$\Rightarrow f'''(0) = -3 \neq 0 \Rightarrow W(0 \mid 0)$$

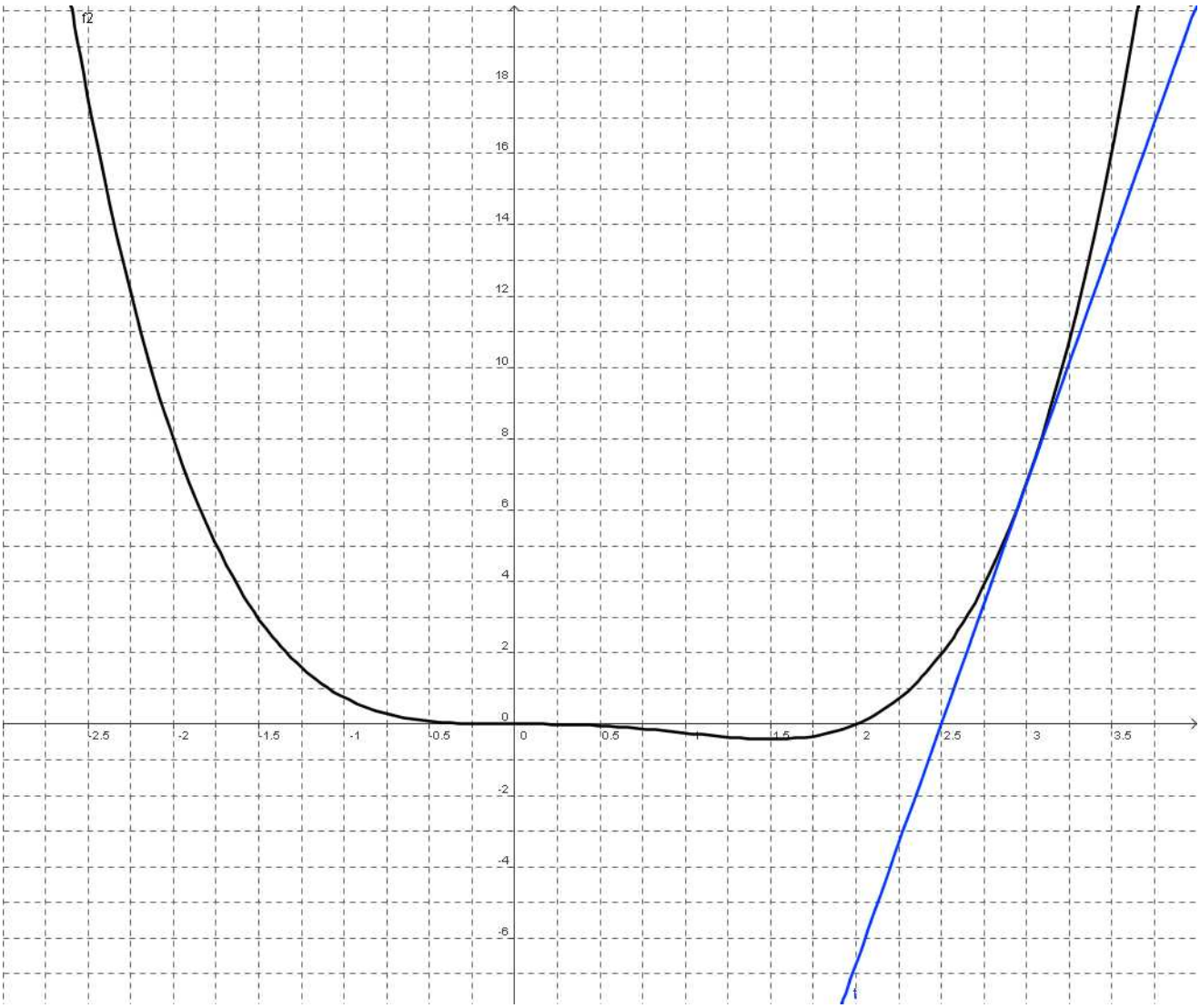
$$\Rightarrow f'''(1) = 3 \neq 0 \Rightarrow W\left(1 \,\middle|\, -\frac{1}{4}\right)$$

f)

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 \Rightarrow f(3) = 6,75$$

$$f'(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 \Rightarrow f'(2) = \frac{27}{2}$$

$$\Rightarrow 6,75 = \frac{27}{2}\cdot 3 + b \Rightarrow b = -33,75$$

$$\Rightarrow t(x) = \frac{27}{2}x - 33,75$$

e)