Musterlösung **11. Jgst.** **7. Test** **Datum: 11.06.2010**

Klasse: GY GS 09 c **Fach: Mathematik (Kernfach)**

Thema: Kurvenuntersuchung ganzrat. Funktionen

1.) Kurvendiskussion I

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} -2x^2 + x & \text{für } x < 1 \\ 4x^3 - 8 & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie die Nullstellen.

Lösung:

$$f_1(x) = x(-2x+1) = 0 \rightarrow x_1 = 0 \wedge x_2 = \frac{1}{2}$$

$$f_2(x) = 4x^3 - 8 = 0 \rightarrow x = \sqrt[3]{2}$$

Alle drei Nullstellen liegen im jeweiligen Definitionsbereich der Funktionen.

b) Wie lauten die Extremwerte?

Lösung:

$$f'(x) = \begin{cases} -4x+1 & \text{für } x < 1 \\ 12x^2 & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$$

$$f_1'(x) = -4x+1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{4}$$

$$f_1''(x) = -4 < 0 \rightarrow Max\left(\frac{1}{4} \mid \frac{1}{8}\right)$$

Liegt im Definitionsbereich der Funktion.

$$f_2'(x) = 12x^2 = 0 \rightarrow x = 0$$

Liegt nicht im Definitionsbereich der Funktion.

2.) Kurvendiskussion II

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 3x^2 - 4x \quad mit \quad x \in \Re$$

a) Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion $f(x)$.

Lösung:

$$f(x) = x\left(-\frac{1}{2}x^2 + 3x - 4\right) = 0 \rightarrow x_1 = 0 \wedge x_2 = 2 \wedge x_3 = 4$$

b) Berechnen Sie die ersten drei Ableitungen von $f(x)$.

Lösung:

$$f'(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 6x - 4 \qquad f''(x) = -3x + 6 \qquad f'''(x) = -3$$

c) Ermitteln Sie Art und Lage der Extrempunkte von $f(x)$.

Lösung:

$$f'(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 6x - 4 = 0 \rightarrow x_{1/2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 24}}{-3}$$

$$\rightarrow x_1 = 0{,}85 \wedge x_2 = 3{,}15$$

$$f''(x) = -3x + 6$$

$$f''(0{,}85) = -3 \cdot 0{,}85 + 6 > 0 \rightarrow Min(0{,}85 \mid -1{,}54)$$

$$f''(3{,}15) = -3 \cdot 3{,}15 + 6 < 0 \rightarrow Max(3{,}15 \mid 1{,}54)$$

d) Legen Sie die Monotonieintervalle fest.

Lösung:

$I_1 =]-\infty\,;\,0{,}85[$ streng monoton fallend

$I_2 =]\,0{,}85\,;\,3{,}15\,[$ streng monoton steigend

$I_3 =]\,3{,}15\,;\,\infty[$ streng monoton fallend

e) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an der Stelle x = 2.

Lösung: $t(x) = 2x-4 \quad [= \text{Wendetangente}]$

f) Untersuchen Sie die Funktion $f(x)$ auf Wendepunkte.

Lösung:

$$f''(x) = -3x+6 = 0 \rightarrow x = 2$$
$$f'''(x) = -3 \neq 0 \rightarrow WP(2 \mid 0)$$

g) Zeigen Sie, dass die Extrema und die Wendepunkte auf einer Geraden liegen.

Berechnen Sie die Geradengleichung.

Lösung:

$$g(x) = \frac{4}{3}x-\frac{8}{3} \quad [= \text{Gerade zwischen HP und TP}]$$

Punktprobe Wendepunkt :

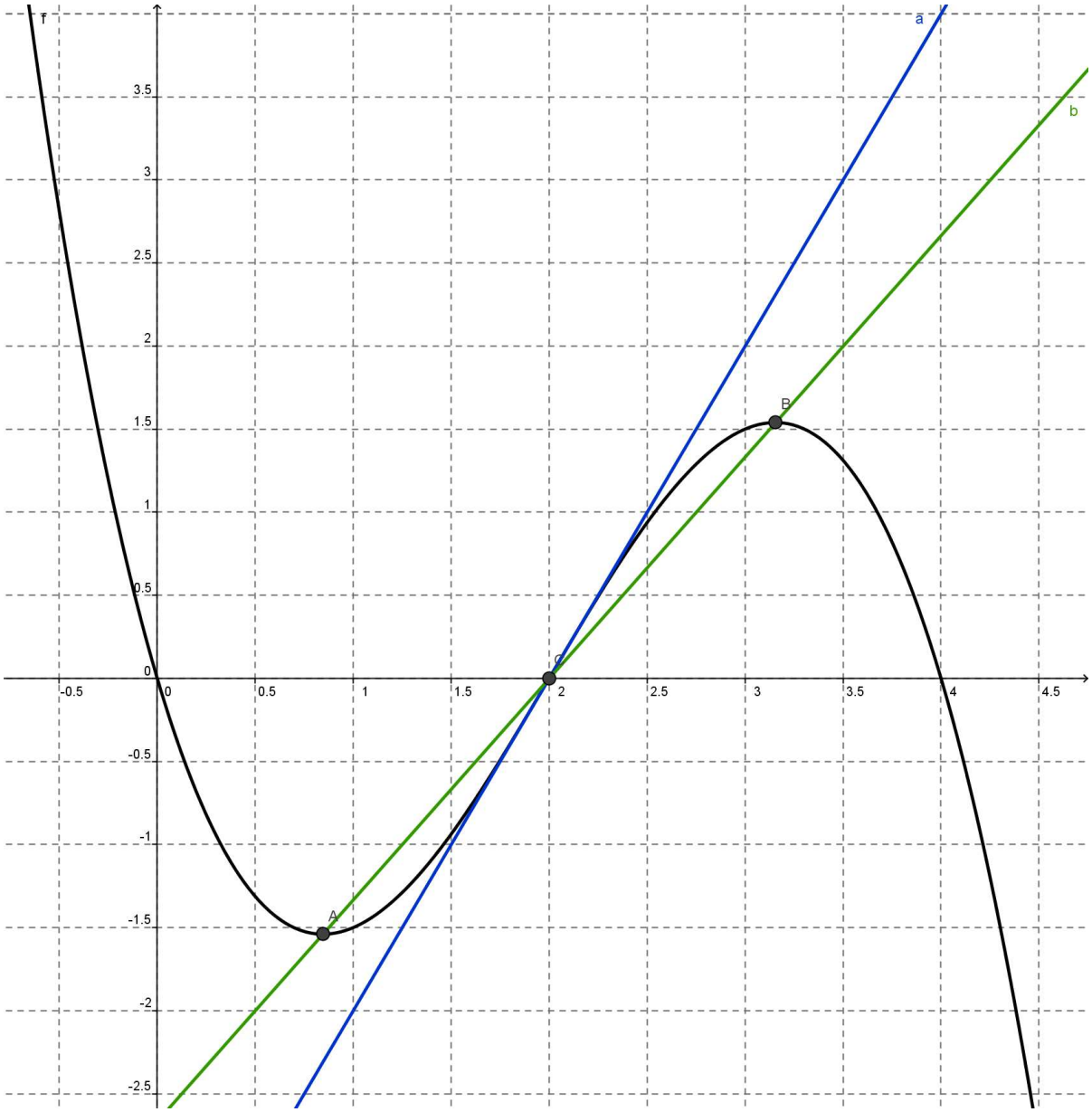
$$g(2) = \frac{4}{3}\cdot 2-\frac{8}{3} = 0$$

h) Bestimmen Sie die Krümmungsintervalle der Funktion $f(x)$.

Lösung:

$K_1 =]-\infty;2[$ Probe: $f''(0)=6 \rightarrow$ Linkskrümmung

$K_2 =]2;\infty[$ Probe: $f''(3)=-3 \rightarrow$ Rechtskrümmung


f
a
b
A
B
C
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2.5
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5