1.) Extremwerte

Bestimmen Sie die Extremwerte bei folgenden Funktionen:

a) $f(x) = x^2 - 8x + 15$

Lösung:

$$f'(x) = 2x - 8 = 0 \rightarrow x = 4$$

$$f''(x) = 2 \rightarrow f''(4) = 2 > 0 \Rightarrow TP(4 \mid -1)$$

b) $f(x) = 32x + x^4$

Lösung:

$$f'(x) = 32 + 4x^3 = 0 \rightarrow x = -2$$

$$f''(x) = 12x^2 \rightarrow f''(-2) = 48 > 0 \Rightarrow TP(-2 \mid -48)$$

2.) Wendepunkte

Bestimmen Sie die Wendepunkte bei folgenden Funktionen:

a) $f(x) = 4 - x^3$

Lösung:

$$f'(x) = -3x^2$$

$$f''(x) = -6x = 0 \rightarrow x = 0$$

$$f'''(x) = -6 \rightarrow f'''(0) = -6 \neq 0 \Rightarrow WP(0 \mid 4)$$

b) $f(x) = -x^4 + 5x^2 - 4$

Lösung:

$$f'(x) = -4x^3 + 10x$$

$$f''(x) = -12x^2 + 10 = 0 \rightarrow |x| = \sqrt{\frac{5}{6}}$$

$$f'''(x) = -24x \rightarrow f'''(\pm\sqrt{\frac{5}{6}}) \neq 0 \Rightarrow WP_{\frac{1}{2}}\left(\pm\sqrt{\frac{5}{6}} \mid -\frac{19}{36}\right)$$

3.) Parameterfunktion I

Die Funktion $f(x) = ax^2 + bx$ soll einen Tiefpunkt bei $T(1,5 / -4,5)$ haben.

Wie sind a und b zu wählen?

Lösung:

$$\left. \begin{array}{l} \text{I.) } f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4}a + \frac{3}{2}b = -\frac{9}{2} \\ \text{II.) } f'\left(\frac{3}{2}\right) = 3a + b = 0 \end{array} \right\} \rightarrow a = 2 \text{ und } b = -6$$

$$\rightarrow f(x) = 2x^2 - 6x$$

4.) Parameterfunktion II

Die Funktion $f(x) = x^4 - 1,5ax^2$ soll zwei Wendepunkte besitzen.

- Wie ist a wählen?
- Wie lauten die Wendepunkte allgemein?

Lösung:

$$f'(x) = 4x^3 - 3ax$$

$$f''(x) = 12x^2 - 3a = 0 \rightarrow |x| = \frac{1}{2}\sqrt{a} \Rightarrow a > 0$$

$$f'''(x) = 24x \rightarrow f''\left(\frac{1}{2}\sqrt{a}\right) \neq 0 \Rightarrow WP_{\frac{1}{2}}\left(\pm \frac{1}{2}\sqrt{a} \mid -\frac{5}{16}a^2\right)$$