Musterlösung **11. Jgst.** **2. Test** **Datum: 30.11.2009**

Klasse: GY GS 09 c **Fach: Mathematik (Kernfach)**

Thema: **Ganzrationale Funktionen; Hornerschema; Linearfaktorzerlegung; Symmetrie**

1.) Nullstellen und Faktordarstellung ganzrationaler Funktionen

Berechnen Sie die Nullstellen folgender Funktionen.

a) $f(x) = x\left(x^2-1\right)$

Lösung: $x = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \;\wedge\; x^2-1 = 0 \Rightarrow x_2 = 1 \;\wedge\; x_3 = -1$

b) $f(x) = (2x+6)^2\left(4x^3-32\right)$

Lösung:

$(2x+6)^2 \Rightarrow x_1 = -3\,[doppelt] \;\wedge\; 4x^3-32 = 0 \Rightarrow x_2 = 2$

c) $f(x) = 2x^4-7x^3-14x^2-5x$

Lösung: $f(x) = 2x^4-7x^3-14x^2-5x = x\left(2x^3-7x^2-14x-5\right)$

Horner-Schema:

f(x) =	2,00 x³	-7,00 x²	-14,00 x	-5,00

x0	a(3)	a(2)	a(1)	a(0)	
	2,00	-7,00	-14,00	-5,00	
-1		-2,00	9,00	5,000	
	2,00	-9,00	-5,00	0,000	f(x0)

Restpolynom:

$r(x) = 2x^2-9x-5 = 0$

$\Rightarrow x_{3/4} = \frac{9 \pm \sqrt{81+40}}{4} = \frac{9 \pm 11}{4} \Rightarrow x_3 = 5 \;\; und \;\; x_4 = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow x_1 = 0 \;\; und \;\; x_2 = -1 \;\; und \;\; x_3 = 5 \;\; und \;\; x_4 = -\frac{1}{2}$

d) $f(x) = x^4 - x^2 - 12$

Lösung:

$$x^4 - x^2 - 12 = 0 \xrightarrow{x^2 = u} u^2 - u - 12 = 0$$

$$u_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+48}}{2} = \frac{1 \pm 7}{2} \Rightarrow u_1 = 4 \wedge u_2 = -3$$

$$\Rightarrow x_1 = 2 \wedge x_2 = -2$$

2.) Ganzrationale Funktionen höheren Grades

Gegeben ist die Funktionen g(x) mit der Funktionsgleichung

$$g(x) = -x^5 + 2x^4 - 3x^2 + 5x - 2$$

a) Bestimmen Sie die Koeffizienten und den Grad der Funktion.

Lösung: $a_5 = -1; \quad a_4 = 2; \quad a_3 = 0; \quad a_2 = -3; \quad a_1 = 5; \quad a_0 = -2$

Grad: n = 5

b) Treffen Sie eine Aussage über die Anzahl der möglichen Nullstellen dieser Funktion und begründen Sie.

Lösung: Die Funktion hat wegen des Grades n = 5 (ungerade) mindestens eine und höchstens fünf Nullstellen.

c) Bilden Sie nun die neue Funktion $f(x) = g(x) + g(-x)$

d) Welche Symmetrieeigenschaft besitzt die Funktion f(x)?

Lösung:

$$g(-x) = -(-x)^5 + 2(-x)^4 - 3(-x)^2 + 5(-x) - 2 = x^5 + 2x^4 - 3x^2 - 5x - 2$$

$$f(x) = g(x) + g(-x)$$

$$f(x) = -x^5 + 2x^4 - 3x^2 + 5x - 2 + x^5 + 2x^4 - 3x^2 - 5x - 2$$

$$f(x) = 4x^4 - 6x^2 - 4 \Rightarrow \textit{Achsensymmetrie}$$

3.) Erstellen ganzrationaler Funktionen

Bilden Sie die ganzrationalen Funktionsgleichungen aus den Angaben:

a) Grad: n = 6; Nullstellen: -3; 2; 4; keine weiteren Nullstellen

Lösung:

$$f(x) = (x+3)^a (x-2)^b (x-4)^c \quad mit\ a+b+c=6$$

$$oder \quad f(x) = (x+3)^a (x-2)^b (x-4)^c (x^2+d) \quad mit\ d>0\ und\ a+b+c=4$$

b) Koeffizienten: $a_4 = a_0 = -3$; $a_3 = 1$; $a_2 = 2$; $a_1 = 5$;

Lösung: $f(x) = -3x^4 + x^3 + 2x^2 + 5x - 3$

c) Grad: n = 4; Nullstellen: -2; 0; 3; 5; Koeffizient: $a_4 = -3$

Lösung: $f(x) = -3x(x+2)(x-3)(x-5)$

4.) Gleichheit ganzrationaler Funktionen

Geben Sie die Werte der Koeffizienten an, damit die beiden jeweiligen Funktionen gleich sind.

a) $f(x) = a^2x^4 + bx^2 - (c-1)x + 3$

$g(x) = 9x^4 + x^2 + 5x - d$

Lösung: $a = \pm 3 \qquad b = 1 \qquad c = -4 \qquad d = -3$

b) $f(x) = (a+1)x^3 + 2bx^2 + (c-2)x$

$g(x) = bx^3 + 4ax^2 + 4dx - c$

Lösung:

$$Ansätze: \quad a+1=b \qquad und \qquad 2b=4a \quad \Rightarrow \quad b=2a$$

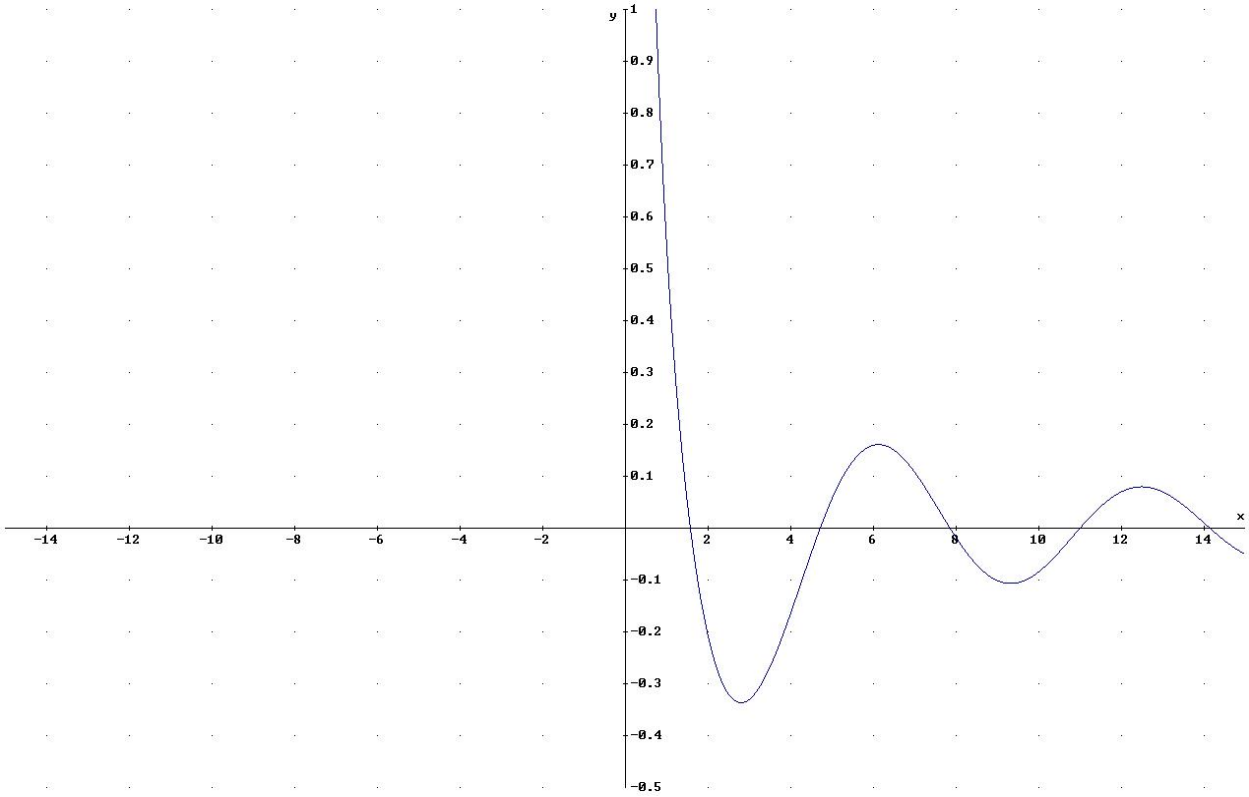
$$\xrightarrow{eingesetzt} \quad a+1=2a \quad \Rightarrow \quad a=1 \quad \Rightarrow \quad b=2$$

$$-c = 0 \Rightarrow c = 0$$

$$c-2 = 4d \xrightarrow{c = 0} -2 = 4d \Rightarrow d = -\frac{1}{2}$$

5.) Symmetrie

a) Vervollständigen Sie den Graphen der Funktion sowohl als Achsen- als auch als Punktsymmetrie.



b) Beweisen Sie die Symmetrie bei folgender Funktion:

$$f(x) = 2x^5 - 7x^3 - 5x$$

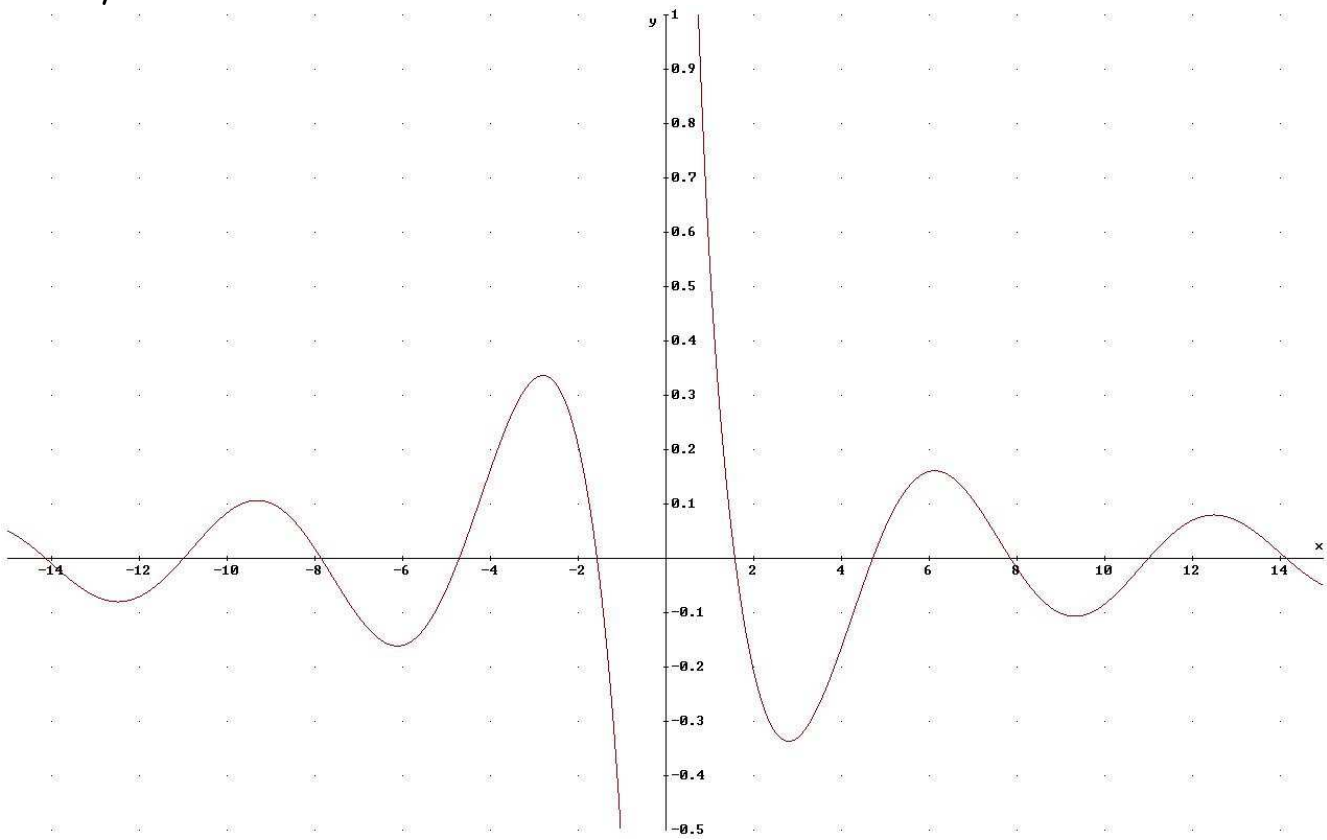
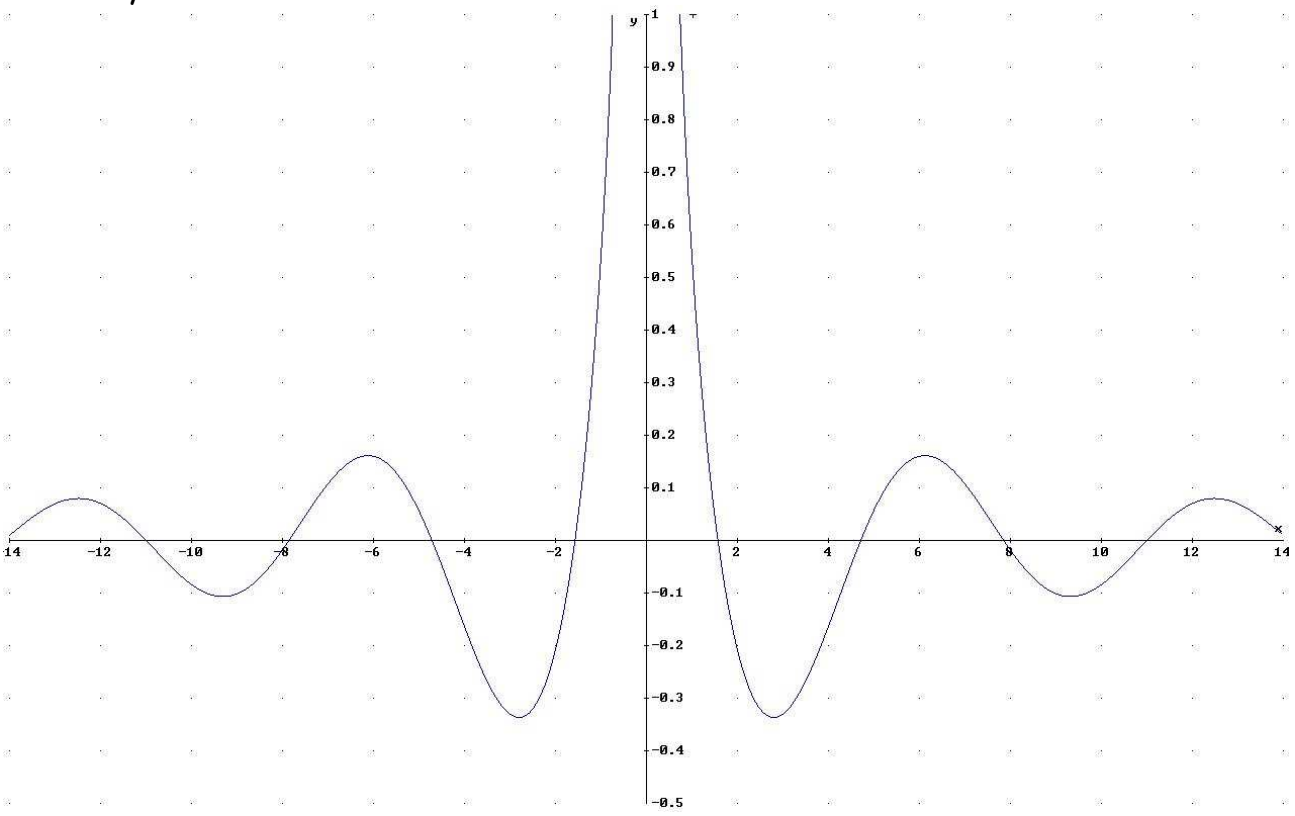
Lösung:

$$f(-x) = 2(-x)^5 - 7(-x)^3 - 5(-x) = -2x^5 + 7x^3 + 5x$$

$$\Rightarrow f(-x) = -f(x) \Rightarrow \textit{Punktsymmetrie}$$

Lösung zu a)

Punktsymmetrie



Achsensymmetrie: