**Musterlösung** **11. Jgst.** **7. Test** **Datum: 30.04.2010**

**Klasse: GY GS 09 b** **Fach: Mathematik (Kernfach)**

**Thema: Ableitungen; Extrema bei ganzrationalen Funktionen**

---

**1.) Ableitungen**

Bilden Sie von jeder Funktion die **erste** Ableitung.

a) $f(x) = (2x-3)(4+3x)$

**Lösung:**

$$f(x) = (2x-3)(4+3x) = 8x+6x^2-12-9x = 6x^2-x-12$$
$$f'(x) = 12x-1$$

b) $f(x) = \dfrac{2x^4-6x^3+5x^2}{x^3}$

**Lösung:**

$$f(x) = \frac{2x^4-6x^3+5x^2}{x^3} = \frac{2x^4}{x^3}-\frac{6x^3}{x^3}+\frac{5x^2}{x^3}$$
$$f(x) = 2x-6+\frac{5}{x} = 2x-6+5x^{-1}$$
$$f'(x) = 2-5x^{-2} = 2-\frac{5}{x^2}$$

c) $f(x) = \dfrac{6x^4-8x^2-4}{2x}$

**Lösung:**

$$f(x)=\frac{6x^4-8x^2-4}{2x}=\frac{6x^4}{2x}-\frac{8x^2}{2x}-\frac{4}{2x}=3x^3-4x-\frac{2}{x}=3x^3-4x-2x^{-1}$$
$$f'(x)=9x^2-4+2x^{-2}=9x^2-4+\frac{2}{x^2}$$

d) $f(x) = \frac{x^{n+2}-3x^n+2x^{n-4}}{x^n}$

**Lösung:**

$$f(x) = \frac{x^{n+2}-3x^n+2x^{n-4}}{x^n} = \frac{x^{n+2}}{x^n}-\frac{3x^n}{x^n}+\frac{2x^{n-4}}{x^n}$$

$$f(x) = x^{n+2-n}-3x^{n-n}+2x^{n-4-n} = x^2-3+2x^{-4}$$

$$f'(x) = 2x-8x^{-5} = 2x-\frac{8}{x^5}$$

e) $f(x) = \frac{x^3-2x^2+x}{x^2(x-1)}$ Achtung: „Binomgefahr"

**Lösung:**

$$f(x) = \frac{x^3-2x^2+x}{x^2(x-1)} = \frac{x(x^2-2x+1)}{x^2(x-1)}$$

$$f(x) = \frac{x(x-1)^2}{x^2(x-1)} = \frac{x-1}{x} = \frac{x}{x}-\frac{1}{x} = 1-x^{-1}$$

$$f'(x) = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$$

f) $f(x) = \sqrt{x}$

**Lösung:**

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \quad \rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

g) $f(x) = \sqrt[3]{x^4}$

**Lösung:**

$$f(x) = \sqrt[3]{x^4} = x^{\frac{4}{3}} \quad \rightarrow \quad f'(x) = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} = \frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$$

**2.) Extremwerte bei Funktionen**

Gegeben sei die Funktion $f_k(x) \quad mit \quad k>0$:

$$f_k(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}kx^2 + 3x + 1$$

**Sei k = 8.**

a) Berechnen Sie die Extremwerte der Funktion.

**Lösung:**

$$f_8(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$$

$$f_8'(x) = x^2 - 4x + 3 = 0 \xrightarrow{Lösungsformel} x_1 = 1 \quad und \quad x_2 = 3$$

$$f_8''(x) = 2x - 4 \xrightarrow{x=1} f''(1) = -2 < 0 \Rightarrow HP\left(1 \mid \frac{7}{3}\right)$$

$$f_8''(x) = 2x - 4 \xrightarrow{x=3} f''(3) = 2 > 0 \Rightarrow TP(3 \mid 1)$$

**Sei k = 2.**

b) Zeigen Sie, dass die Funktion nun keine Extremwerte besitzt.

**Lösung:**

$$f_2(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x + 1$$

$$f_2'(x) = x^2 - x + 3 = 0 \xrightarrow{Lösungsformel} x_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-12}}{2}$$

$\Rightarrow$ *keine Lösung*

Hiermit ist gezeigt, dass es keine Stelle mit der Steigung m = 0 gibt, so dass die notwendige Bedingung nicht erfüllt ist.

c) Welche Steigung besitzt die Funktion in x = 1?

**Lösung:**

$$f_2'(1) = 1-1+3 = 3 = m \quad [Steigung]$$

**Sei k > 0.**

d) Für welchen Wert von k besitzt die Funktion einen Sattelpunkt? Berechnen Sie zudem nur die x-Koordinate und belegen Sie Ihre Behauptung durch eine geeignete Begründung.

**Lösung:**

$$f_k(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}kx^2 + 3x + 1$$

$$I.) \quad f_k'(x) = x^2 - \frac{1}{2}kx + 3 = 0$$

$$II.) \quad f''(x) = 2x - \frac{1}{2}k = 0 \rightarrow x = \frac{1}{4}k$$

$$\xrightarrow{II.)\ in\ I.)} \left(\frac{1}{4}k\right)^2 - \frac{1}{2}k \cdot \left(\frac{1}{4}k\right) + 3 = 0 \rightarrow \frac{1}{16}k^2 - \frac{1}{8}k^2 + 3 = 0$$

$$\rightarrow -\frac{1}{16}k^2 = -3 \rightarrow k^2 = 48 \rightarrow k = \sqrt{48}$$

$x-Wert:$

$$\rightarrow x = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{48} \approx 1,73$$

An der berechneten Stelle hat die Funktion die Steigung m = 0 und der Wert der zweiten Ableitung ist ebenfalls 0. Daher liegt aufgrund des Grades der Funktion mit n = 3 ein Sattelpunkt vor.

Alternative: Berechnung des Wendepunktes mit der zweiten Ableitung!