Musterlösung **11. Jgst.** **2. Test** **Datum: 24.11.2009**

Klasse: GY GS 09 b **Fach: Mathematik (Kernfach)**

Thema: Ganzrationale Funktionen; Hornerschema; Linearfaktorzerlegung

---

1.) Nullstellen und Faktordarstellung ganzrationaler Funktionen

Berechnen Sie die Nullstellen folgender Funktionen.

a) $f(x) = 2x^2(x+1)$

Lösung: $x^2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0\,[doppelt] \quad \wedge \quad x+1 = 0 \Rightarrow x_2 = -1$

b) $f(x) = (4x-8)(x^2-16)$

Lösung: $4x-8 = 0 \Rightarrow x_1 = 2 \quad \wedge \quad x^2-16 = 0 \Rightarrow x_{2/3} = \pm 4$

c) $f(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12$

Horner-Schema:

		x4	x3	x2	x1	x0
f(x) =		1,00	2,00	-7,00	-8,00	12,00

x0		a(4)	a(3)	a(2)	a(1)	a(0)
		1,00	2,00	-7,00	-8,00	12,00
1		0,00	1,00	3,00	-4,00	-12,00
		1,00	3,00	-4,00	-12,00	0,00
2		0,00	2,00	10,00	12,00	
		1,00	5,00	6,00	0,00	
-2		0,00	-2,00	-6,00		
		1,00	3,00	0,00		
-3		0,00	-3,00			
		1,00	0,00			

$\Rightarrow x_1 = 1 \quad und \quad x_2 = 2 \quad und \quad x_3 = -2 \quad und \quad x_4 = -3$

d) $f(x) = 4x^4 - 14x^3 - 28x^2 - 10x$

Lösung: $f(x) = 4x^4 - 14x^3 - 28x^2 - 10x = x\left(4x^3 - 14x^2 - 28x - 10\right)$

Horner-Schema:

f(x) =	4,00 x ³	-14,00 x ²	-28,00 x	-10,00

x0	a(3)	a(2)	a(1)	a(0)	
	4,00	-14,00	-28,00	-10,00	
-1		-4,00	18,00	10,000	
	4,00	-18,00	-10,00	0,000	f(x0)

Restpolynom:

$r(x) = 4x^2 - 18x - 10 = 0$

$\Rightarrow \quad x_{3/4} = \dfrac{18 \pm \sqrt{324+160}}{8} = \dfrac{18 \pm 22}{8} \Rightarrow x_3 = 5 \quad und \quad x_4 = -\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \quad x_1 = 0 \quad und \quad x_2 = -1 \quad und \quad x_3 = 5 \quad und \quad x_4 = -\dfrac{1}{2}$

e) $f(x) = \dfrac{1}{2}(x+8)^2$

Lösung: $(x+8)^2 = 0 \xrightarrow{\sqrt{\ }} |x+8| = 0 \Rightarrow x = -8$

f) $f(x) = x^4 + 4x^2 - 5$

Lösung:

$x^4 + 4x^2 - 5 = 0 \xrightarrow{x^2=u} u^2 + 4u - 5 = 0$

$u_{1/2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16+20}}{2} = \dfrac{-4 \pm 6}{2} \Rightarrow u_1 = 1 \quad \wedge \quad u_2 = -5$

$\Rightarrow \quad x_1 = 1 \quad \wedge \quad x_2 = -1$

2.) Ganzrationale Funktionen höheren Grades

Gegeben ist die Funktionen g(x) mit der Funktionsgleichung

$$g(x) \quad = \quad -2x^5 + 4x^4 - x^2 + x - 8$$

Bestimmen Sie die Koeffizienten und den Grad der Funktion.

Lösung: $a_5 = -2; \quad a_4 = 4; \quad a_3 = 0; \quad a_2 = -1; \quad a_1 = 1; \quad a_0 = -8$

Grad: n = 5

3.) Erstellen ganzrationaler Funktionen

Bilden Sie die ganzrationalen Funktionsgleichungen aus den Angaben:

a) Grad: n = 5; Nullstellen: -2; 1; 3

Lösung:

$$f(x) \quad = \quad (x+2)^3 (x-1)(x-3)$$

$$oder \quad f(x) \quad = \quad (x+2)(x-1)(x-3)\left(x^2+a\right) mit\ a > 0$$

b) Koeffizienten: a_4 = -1; a_3 = 3; a_2 = 5; a_1 = 0; a_0 = -2

Lösung: $f(x) \quad = \quad -x^4 + 3x^3 + 5x^2 - 2$

c) Grad: n = 4; Nullstellen: -5; -1; 2;3; Koeffizient: a_4 = -2

Lösung: $f(x) \quad = \quad -2(x+5)(x+1)(x-2)(x-3)$

4.) Gleichheit ganzrationaler Funktionen

Gegeben Sie die Werte der Koeffizienten an, damit die beiden jeweiligen Funktionen gleich sind.

a)
$$f(x) = ax^4 - bx^2 + cx - 8$$
$$g(x) = -2x^4 + 3x^2 + x - d$$

Lösung: $a = -2 \quad b = -3 \quad c = 1 \quad d = 8$

b)
$$f(x) = (a-2)x^3 + b^2x^2 + (c+4)x$$
$$g(x) = bx^3 + ax^2 + 3x$$

Lösung:

$$\text{Ansätze:} \quad a - 2 = b \quad \text{und} \quad b^2 = a \xrightarrow{\text{eingesetzt}} b^2 - 2 = b \Rightarrow b^2 - b - 2 = 0$$

$$\Rightarrow b_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \Rightarrow b_1 = -1 \quad \text{und} \quad b_2 = 2 \Rightarrow a_1 = 4 \quad \text{und} \quad a_2 = 1$$

$$c + 4 = 3 \Rightarrow c = -1$$

5.) Aussagenprüfung

Gegeben Sie an, ob die Aussagen wahr oder falsch sind und begründen Sie Ihre Entscheidung.

a) Jede ganzrationale Funktion hat mindestens eine Nullstelle.

Lösung: **falsch**; ganzrationale Funktionen von geradem Grad (z.B. Parabeln) können auch keine Nullstelle haben

b) Wenn eine ganzrationale Funktion den Grad n = 5 besitzt, hat sie höchstens fünf Schnittpunkte mit der x-Achse.

Lösung: **richtig**; das sie in maximal fünf Linearfaktoren zerlegt werden kann:

$$f(x) = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)$$

c) Es gibt ganzrationale Funktionen, die zwei Schnittpunkte mit der y-Achse haben.

Lösung: **falsch**; da es dann keine Funktion mehr wäre, weil die Eindeutigkeit der Zuordnung verletzt wäre

d) Wenn eine ungerade Anzahl von Nullstellen vorliegt, dann ist der Grad der dazugehörigen ganzrationalen Funktion ebenfalls ungerade.

Lösung: **falsch**; die Funktion mit der Funktionsgleichung $f(x) = (x \pm b)^2$ ist eine Parabel (Grad n = 2) und hat nur eine Nullstelle bei

$$x = b \quad oder \quad x = -b$$

e) Wenn eine ganzrationale Funktion einen geraden Grad hat, dann hat Sie auch eine gerade Anzahl von Nullstellen.

Lösung: **falsch**; die Funktion mit der Funktionsgleichung $f(x) = (x \pm b)^2$ ist eine Parabel (Grad n = 2) und hat nur eine Nullstelle bei

$$x = b \quad oder \quad x = -b$$