Musterlösung 11. Jgst. 3. Klassenarbeit Datum: 05.03.2010

Klasse: GY GS 09 c Fach: Mathematik (Kernfach)

Thema: Differentialquotient; Ableitungen; Tangentenberechnung; Pascalsches △

1.) Binomischer Lehrsatz und Pascalsches Dreieck

Entwickeln Sie die folgenden Ausdrücke nach dem Binomischen Lehrsatz.

a) $(3+k)^6$

Lösung:

$$(3+k)^6 = 1\cdot 3^6\cdot k^0 + 6\cdot 3^5\cdot k^1 + 15\cdot 3^4\cdot k^2 + 20\cdot 3^3\cdot k^3 + 15\cdot 3^2\cdot k^4 + 6\cdot 3^1\cdot k^5 + 1\cdot 3^0\cdot k^6$$

$$(3+k)^6 = 729 + 1.458k + 1.215k^2 + 540k^3 + 135k^4 + 18k^5 + k^6$$

b) $\left(\frac{3}{4}+\frac{2}{3}k\right)^8$

Lösung:

$$\left(\frac{3}{4}+\frac{2}{3}k\right)^8 = 1\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^8\cdot\left(\frac{2}{3}k\right)^0 + 8\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^7\cdot\left(\frac{2}{3}k\right)^1 + 28\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^6\cdot\left(\frac{2}{3}k\right)^2 + 56\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^5\cdot\left(\frac{2}{3}k\right)^3 + 70\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^4\cdot\left(\frac{2}{3}k\right)^4 + 56\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^3\cdot\left(\frac{2}{3}k\right)^5 + 28\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}k\right)^6 + 8\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^1\cdot\left(\frac{2}{3}k\right)^7 + 1\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^0\cdot\left(\frac{2}{3}k\right)^8$$

$$\left(\frac{3}{4}+\frac{2}{3}k\right)^8 = \frac{6.561}{65.536}+\frac{729}{1.024}k+\frac{567}{256}k^2+\frac{63}{16}k^3+\frac{35}{8}k^4+\frac{28}{9}k^5+\frac{96}{81}k^6+\frac{256}{729}k^7+\frac{256}{6.561}k^8$$

c) Was versteht man unter der Symmetrie des Pascalschen Dreiecks?

Lösung:

Die Werte einer Zeile des Pascalschen Dreiecks entwickeln sich zur Mitte hin genau in spiegelverkehrt identischer Form; d.h. achsensymmetrisch; so entstehen von außen nach innen gelesen von beiden Seiten die gleichen Werte.

2.) Ableitung(en)

Bilden Sie die erste Ableitung der jeweiligen Funktionen:

a) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{5}x^3$ **Lösung:** $f'(x) = 2x^3 - \frac{3}{5}x^2$

b) $f(x) = -6x^2 + 3x - 9$ **Lösung:** $f(x) = -12x + 3$

c) $f(x) = (2x+4)(3x^2 - 6x)$

Lösung:

$$f(x) = (2x+4)(3x^2-6x) = 6x^3 - 12x^2 + 12x^2 - 24x$$
$$f'(x) = 18x^2 - 24$$

d) $f(x) = (8x^2 - 4x)^2$

Lösung:

$$f(x) = (8x^2-4x)^2 = 64x^4 - 64x^3 + 16x^2$$
$$f'(x) = 256x^3 - 192x^2 + 32x$$

e) $f(x) = 3x^{2n} - 6x^n + 3x$

Lösung: $f'(x) = 6nx^{2n-1} - 6nx^{n-1} + 3$

3.) Tangenten berechnen

Berechnen Sie die Ableitung von f an der Stelle $x = x_0$ und geben Sie die Gleichung der Tangente an:

a) $f(x) = -x^2 + 4x \qquad mit \quad x_0 = 3$

Lösung:

$$f(3) = -9 + 12 = 3 \quad und \quad f'(x) = -2x + 4 \xrightarrow{x_0 = 3} f'(3) = -6 + 4 = -2$$

$y - Achsenabschnitt$:

$$3 = (-2) \cdot 3 + b \Rightarrow b = 9 \Rightarrow t(x) = (-2)x + 9$$

b) $f(x) = 7x^3 + 9x^2 - 8 \qquad mit \quad x_0 = -1$

Lösung:

$$f(-1) = -7 + 9 - 8 = -6 \quad und \quad f'(x) = 21x^2 + 18x \xrightarrow{x_0 = (-1)} f'(-1) = 21 - 18 = 3$$

$y - Achsenabschnitt$:

$$-6 = 3 \cdot (-1) + b \Rightarrow b = -3 \Rightarrow t(x) = 3x - 3$$

4.) Ableitung mit der h-Methode

Bilden Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen mittels der h-Methode:

a) $f(x) = 3x$

Lösung:

$$m_{Tan} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3(x+h) - 3x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3x + 3h - 3x}{h}$$

$$m_{Tan} = \lim_{h \to 0} \frac{3h}{h} = \lim_{h \to 0} 3 = 3 = f'(x)$$

b) $f(x) = 4x^2$

Lösung:

$$m_{Tan} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4(x+h)^2 - 4x^2}{h}$$

$$m_{Tan} = \lim_{h \to 0} \frac{4(x^2 + 2xh + h^2) - 4x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4x^2 + 8xh + 4h^2 - 4x^2}{h}$$

$$m_{Tan} = \lim_{h \to 0} \frac{h(8x + 4h)}{h} = \lim_{h \to 0} (8x + 4h) = 8x = f'(x)$$

5.) Erklärungen zu Ableitung(en)

a) Begründen Sie aus analytischer **und** grafischer Sichtweise, warum die Ableitung einer Konstanten wie z.B. $f(x)=2$ immer den Wert 0 ergibt.

Lösung:

Analytisch: $f(x)=2 \quad \Rightarrow \quad f(x)=2x^0 \xrightarrow{\text{Ableitung}} f'(x)=0\cdot 2x^{0-1}=0$

Graphisch: Die Funktion $f(x)=2$ ist eine Konstante mit der Steigung m = 0.

b) Anhand welcher Ereignisse aus Ihren unmittelbaren Lebensbereichen können Sie Bewegungsformen erkenn, die dem Prinzip der Tangente in einem Punkt entsprechen?

Nennen Sie **drei** Beispiele.

Lösung: 1.) Salatschleuder 2.) Schlittschuh-/Eisschnellauf

3.) Fahrzeug in der Kurve 4.) Regenschirmtropfen

6.) Steigungen ermitteln

(i) Gegeben sei folgende Funktion: $f(x) = \frac{1}{4}x^4-2x^3+\frac{9}{2}x^2$

a) Berechnen Sie die Ableitung von f(x).

b) In welchen Punkten hat der Graph der Funktion eine waagrechte Tangente?

Lösung:

$$f'(x) = x^3-6x^2+9x = 0 \Rightarrow x(x^2-6x+9) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad und \quad x^2-6x+9 = 0 \Rightarrow x_2 = 3$$

(ii) Sei nun die Funktion gegeben mit $f(x) = -\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{2}x$

In welchen Punkten und mit welcher Steigung schneidet die Funktion die x-Achse?

Lösung:

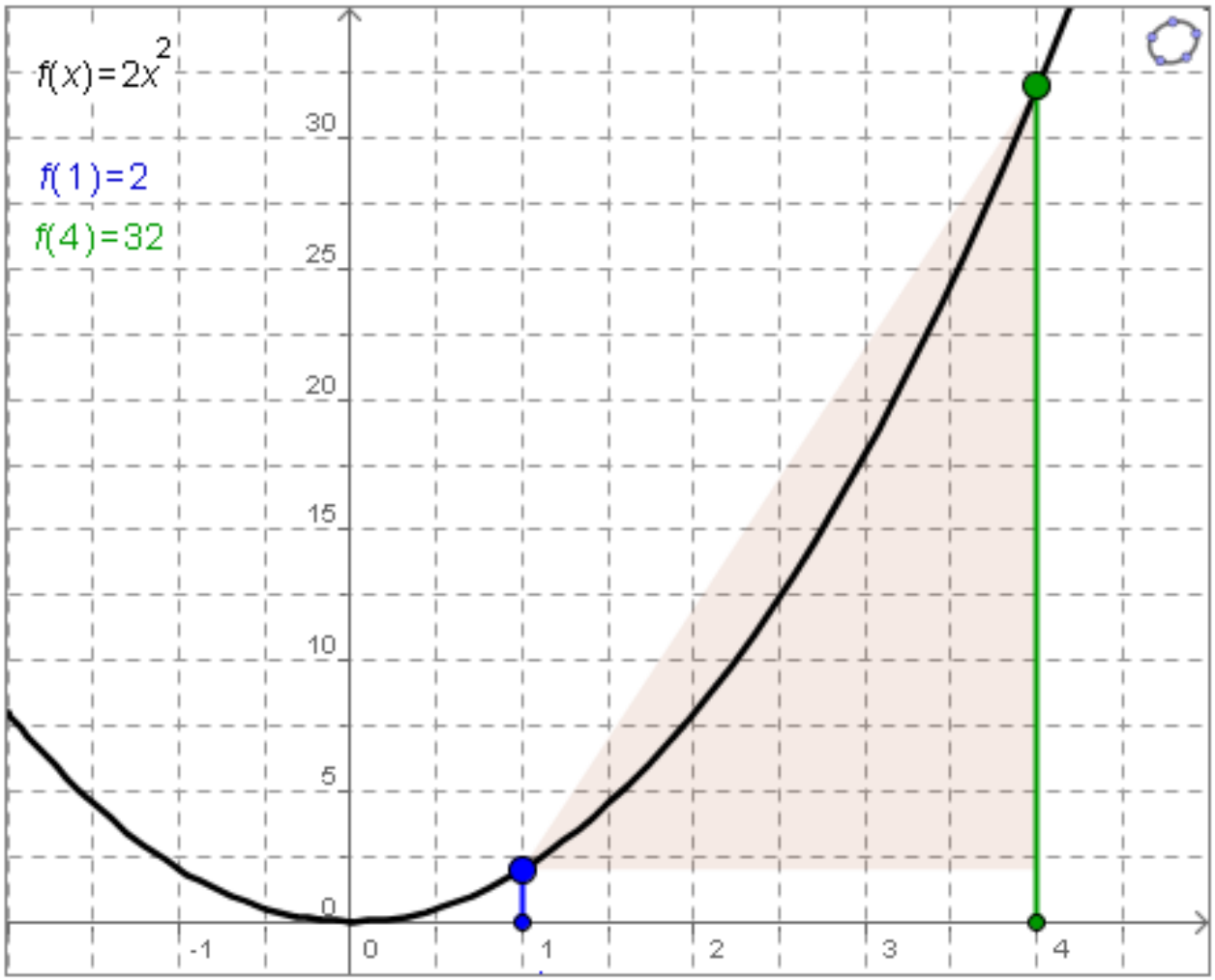
$$Nullstellen: \quad f(x) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{2}x = 0 \Rightarrow x\left(-\frac{1}{6}x^2+\frac{3}{2}\right) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad und \quad x_2 = -3 \quad und \quad x_3 = 3$$

Steigung in den Nullstellen mittels 1. Ableitung berechnen:

$$f'(x) = -\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2} \Rightarrow f'(0) = \frac{3}{2} \wedge f'(-3) = -3 \wedge f'(3) = -3$$

7.) Steigung einer Funktion in der Umgebung eines Punktes



Gegeben sei das obige Ausgangsbild.

a) Vervollständigen Sie den folgenden Lückentext:

Ist $f(x)$ eine ***reelle Funktion***, und sind x_0 und x_1 Zahlen, so dass $f(x)$ im gesamten ***Intervall*** $[x_0, x_1]$ definiert ist, so heißt die Größe $\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$ ***Differenzenquotient***. Geometrisch stellt er den ***Anstieg*** der ***Geraden*** durch die Punkte $(x_0, f(x_0))$ und $(x_1, f(x_1))$ des Graphen von $f(x)$ [= Sekante] dar und kann als ***mittlere/durchschnittliche Änderungsrate*** von $f(x)$ im Intervall $[x_0, x_1]$ interpretiert werden.

Mit den Abkürzungen $\Delta x = x_1 - x_0$ und $\Delta f = f(x_1) - f(x_0)$ schreibt er sich einfach als $\frac{\Delta f}{\Delta x}$, was seinen Charakter als ***Quotient von Differenzen*** unterstreicht.

Zur Berechnung der Ableitung von *f(x)* an der Stelle *x* wird der ***Differenzenquotient*** auch in der Form $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ angeschrieben, wobei h positiv oder negativ sein kann. Der ***Grenzwert*** $h \to 0$ dieser Größe ist - wenn er existiert - die Ableitung *f '(x)* und nennt sich ***Differentialquotient***, definiert durch $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

Der gesamte Themenkomplex dieses Zweigs der Mathematik gehört zur sogenannten ***Differentialrechnung***.

Begriffe zum Einsetzen:

Geraden	$\frac{\Delta f}{\Delta x}$ ***mittlere/durchschnittliche Änderungsrate***	***Anstieg***
Differenzenquotient	***Grenzwert***	$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$
Differentialquotient	***Differentialrechnung***	***reelle Funktion***
Quotient von Differenzen	***Intervall***	

b) Welchen Wert hat die Ableitung an der Stelle x = 1?

Lösung: $f'(x) = 4x \xrightarrow{x=1} f'(1) = 4 = m$

c) Berechnen Sie eine Näherung mittels der Sekantensteigungen an die Stelle x = 1 mit den x_2-Werten x_2 = {4; 2; 1,1 und 1,01}

Lösung:

1.) $m_{Sek} = \frac{32-2}{4-1} = \frac{30}{3} = 10$

2.) $m_{Sek} = \frac{8-2}{2-1} = \frac{6}{1} = 6$

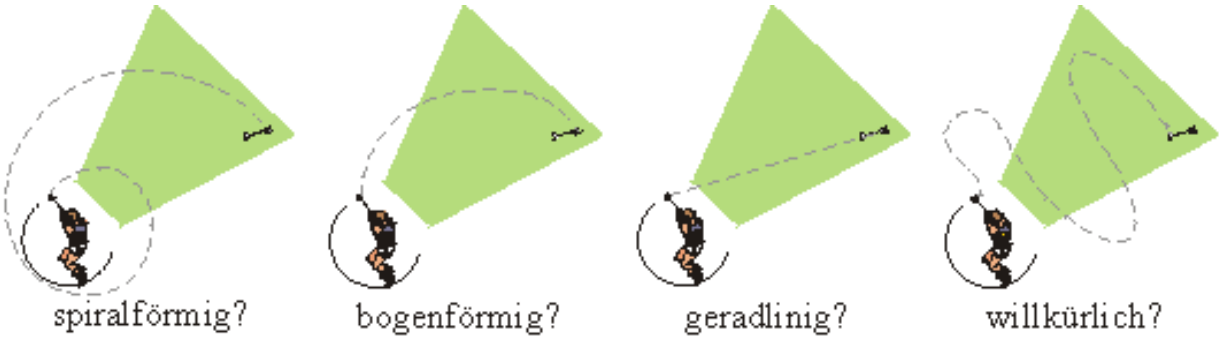
3.) $m_{Sek} = \frac{2,42-2}{1,1-1} = \frac{0,42}{0,1} = 4,2$

4.) $m_{Sek} = \frac{2.0402-2}{1,01-1} = \frac{0,0402}{0,01} = 4,02$

8.) **Sachaufgabe zu Ableitung(en):** Flugbahn beim Hammerwurf

a) Welche Flugbahn wird ein Hammer zurücklegen?

Kreuzen Sie die richtige Lösung an und begründen Sie Ihre Meinung aus mathematischer Sicht!

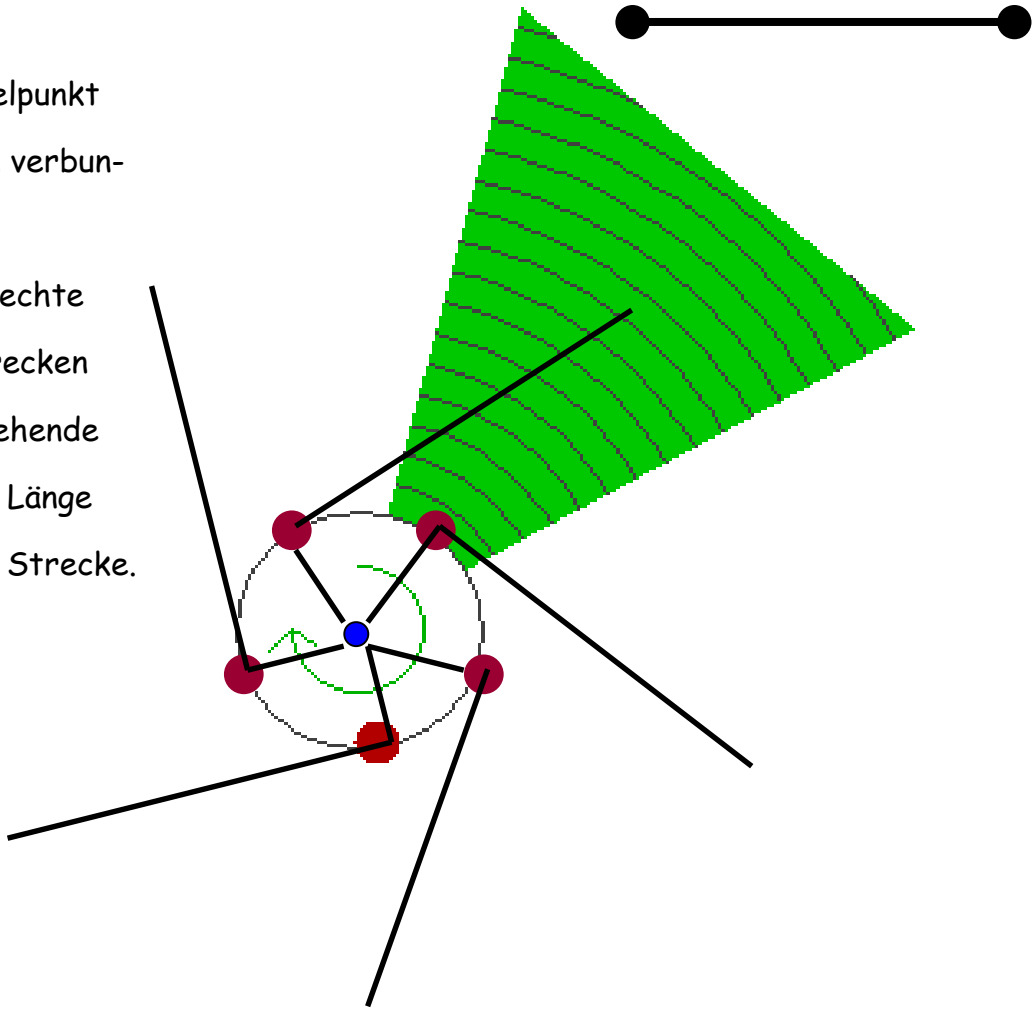


Lösung: Der Hammer wird geradlinig bzw. tangential zur Kreisbewegung wegfliegen.

b) **Konstruieren** Sie die Flugbahn des Hammers beim Hammerwerfen ausgehend von den verschiedenen Wurfpositionen, der Wurflänge und der Tatsache, dass der Werfer im Mittelpunkt des Abwurfkreises steht.

Lösung:

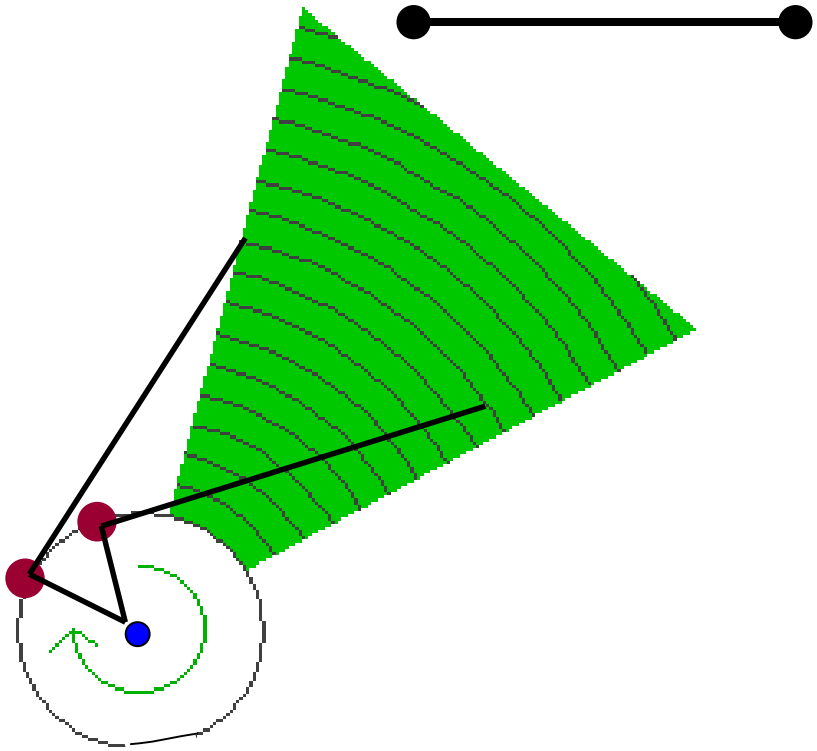
Zuerst muss der Mittelpunkt mit den Abwurfstellen verbunden werden; danach wird die Senkrechte zu den Verbindungsstrecken konstruiert; die entstehende Tangente hat dann die Länge der oben angegebenen Strecke.



c) In welchem Bereich des Kreisbogens wird der Hammer nach dem Loslassen den Sektor treffen?

Konstruieren Sie die Flugbahnen ausgehend davon, dass der Werfer im Mittelpunkt des Abwurfkreises steht.

Lösung:



Zuerst muss der Mittelpunkt mit den Abwurfstellen verbunden werden; danach wird die Senkrechte zu den Verbindungsstrecken konstruiert; die beiden entstehenden Tangenten haben dann die Länge der oben angegebenen Strecke.
Zwischen den beiden Abwurfpunkten muss dann der Hammer weggeschleudert werden, damit er im Sektor landen kann.