Musterlösung **11. Jgst.** **3. Klassenarbeit** **Datum: 03.03.2010**

Klasse: GY GS 09 b **Fach: Mathematik (Kernfach)**

Thema: Differentialquotient; Ableitungen; Tangentenberechnung; Pascalsches △

1.) Binomischer Lehrsatz und Pascalsches Dreieck

Entwickeln Sie die folgenden Ausdrücke nach dem Binomischen Lehrsatz.

a) $(k+6)^4$

Lösung:

$$(k+6)^4 = 1\cdot k^4\cdot 6^0 + 4\cdot k^3\cdot 6^1 + 6\cdot k^2\cdot 6^2 + 4\cdot k^1\cdot 6^3 + 1\cdot k^0\cdot 6^4$$

$$(k+6)^4 = k^4 + 24k^3 + 216k^2 + 864k + 1.296$$

b) $\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{4}k\right)^6$

Lösung:

$$\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{4}k\right)^6 = 1\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^6\cdot\left(\frac{1}{4}k\right)^0 + 6\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^5\cdot\left(\frac{1}{4}k\right)^1 + 15\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^4\cdot\left(\frac{1}{4}k\right)^2$$
$$+ 20\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{4}k\right)^3 + 15\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{4}k\right)^4 + 6\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^1\cdot\left(\frac{1}{4}k\right)^5 + 1\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^0\cdot\left(\frac{1}{4}k\right)^6$$

$$\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{4}k\right)^6 = \frac{64}{729}+\frac{16}{81}k+\frac{5}{27}k^2+\frac{5}{54}k^3+\frac{5}{192}k^4+\frac{1}{256}k^5+\frac{1}{4.096}k^6$$

c) Im Pascalschen Dreieck gilt folgende Gesetzmäßigkeit:

Die Zahlenwerte der n-ten Zeile ergeben als Summe 2^n.

(i) Zeigen Sie dies anhand der Zahlenwerte der 5. Zeile.

Lösung: ***Zahlenwerte in Zeile 5: 1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 32 =*** 2^5

(ii) Erklären Sie aufgrund dieser Gesetzmäßigkeit, dass sich die Summe in der jeweils darauf folgenden Zeile verdoppelt und beweisen Sie diese Tatsache.

Lösung: Zahlenwerte in Zeile (n+1):

$2^{n+1} \Rightarrow 2^n\cdot 2^1 = 2\cdot 2^n \Rightarrow$ Verdoppelung der Zeilensumme aus Zeile n

2.) Ableitung(en)

Bilden Sie die erste Ableitung der jeweiligen Funktionen:

a) $f(x) = \frac{1}{4}x^5 - \frac{1}{3}x^4$

Lösung: $f'(x) = \frac{5}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3$

b) $f(x) = -4x^3 + 5x^2 - 7x + 8$

Lösung: $f'(x) = -12x^2 + 10x - 7$

c) $f(x) = (2x+4)^2$

Lösung: $f'(x) = 8x + 16$

d) $f(x) = (8x^2 - 4x)(-2x+3)$

Lösung:

$$f(x) = (8x^2 - 4x)(-2x+3) = -16x^3 + 32x^2 - 12x$$

$$f'(x) = -48x^2 + 64x - 12$$

e) $f(x) = 2x^{2k} - 5x^k + 8x$

Lösung: $f'(x) = 4kx^{2k-1} - 5kx^{k-1} + 8$

3.) Tangenten berechnen

Berechnen Sie die Gleichung der Tangenten aufgrund der Angaben:

a) $f(x) = x^2 - 3x \quad mit \quad x_0 = 4$

Lösung:

$f(4) = 16 - 12 = 4 \quad und \quad f'(x) = 2x - 3 \xrightarrow{x_0 = 4} f'(4) = 8 - 3 = 5$

$y - Achsenabschnitt$:

$4 = 5 \cdot 4 + b \Rightarrow b = -16 \Rightarrow t(x) = 5x - 16$

b) $f(x) = -2x^3 + 4x^2 - 10 \quad mit\ Tangente\ parallel\ zu \quad 2y - 5x = 4$

Lösung:

$f(x) = -2x^3 + 4x^2 - 10 \xrightarrow{\text{Ableitung}} f'(x) = -6x^2 + 8x$

$mit\ Tangente\ parallel\ zu \quad 2y - 5x = 4 \xrightarrow{\text{explizit}} y = \frac{5}{2}x + 2$

x-Stellen bei gegebener Steigung berechnen:

$f'(x) = m \Rightarrow -6x^2 + 8x = \frac{5}{2} \xrightarrow{Lösungsformel} x_1 = \frac{1}{2} \quad und \quad x_2 = \frac{5}{6}$

$Tangente\ 1: \quad x_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} + 1 - 10 = -9,25$

$y - Achsenabschnitt$:

$-9,25 = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{2} + b \Rightarrow b = -10,5 \Rightarrow t_1(x) = \frac{5}{2}x - 10,5$

$Tangente\ 2: \quad x_2 = \frac{5}{6} \Rightarrow f\left(\frac{5}{6}\right) = \frac{175}{108} - 10 = -8,38$

$y - Achsenabschnitt$:

$-8,38 = \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{6} + b \Rightarrow b = -10,5 \Rightarrow t_2(x) = \frac{5}{2}x - 10,46$

4.) Steigungen ermitteln

(i) Gegeben sei folgende Funktion: $f(x) = \frac{3}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2$

a) Berechnen Sie die Ableitung von f(x).

b) In welchen Punkten hat der Graph der Funktion eine waagrechte Tangente?

Lösung:

$$f'(x) = 3x^3 - 2x^2 - 5x = 0 \Rightarrow x(3x^2 - 2x - 5) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad und \quad 3x^2 - 2x - 5 = 0 \Rightarrow x_2 = -1 \quad und \quad x_3 = \frac{5}{3}$$

(ii) Sei nun die Funktion gegeben mit $f(x) = -2x^3 + 8x$

In welchen Punkten und mit welcher Steigung schneidet die Funktion die x-Achse?

Lösung:

$$Nullstellen: \quad f(x) = 0 \Rightarrow -2x^3 + 8x = 0 \Rightarrow -2x(x^2 - 4) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad und \quad x_2 = -2 \quad und \quad x_3 = 2$$

Steigung in den Nullstellen mittels 1. Ableitung berechnen:

$$f'(x) = -6x^2 + 8$$

$$f'(0) = 8 \quad \wedge \quad f'(-2) = -16 \quad \wedge \quad f'(2) = -16$$

5.) Multiple Choice

a) Die Ableitung einer Funktion ist

☐	eine Gleichung?	☐	eine Zahl?
☒	eine Funktion?	☐	eine Zeichnung?

b) Die Ableitung einer Funktion in einem Punkt ist

☐	eine Gleichung?	☒	eine Zahl?
☐	eine Funktion?	☐	eine Zeichnung?

c) Die Ableitung hängt eng mit folgendem Begriff zusammen:

☐	Gleichung.	☐	Lösungsmenge.
☒	Steigung.	☐	Nullstelle der Funktion.

d) Ist die Ableitung einer Funktion überall Null,
so ist die Funktion notwendigerweise

☐	eine Parabel.	☒	konstant.
☐	selbst auch Null.	☐	linear.

e) Die Ableitung einer Funktion ist ein Maß dafür …

- ☒ … wie steil ihr Graph ist.
- ☐ … welchen Wert sie bei gegebenem x hat.
- ☐ … wo ihr Graph die x-Achse schneidet.
- ☐ … wie viele Nullstellen die Funktion besitzt.

f) Ist f eine differenzierbare Funktion und gilt f(3) = 5 und f'(3) = 2,
dann ist ein Näherungswert für f(3,001) gegeben durch

- ☐ $2+5\cdot 0,001 = 2,005$
- ☒ $5+2\cdot 0,001 = 5,002$
- ☐ $2+0,001 = 2,001$
- ☐ $0,001+5\cdot 2 = 10,001$

g) Die Ableitung einer Funktion vom Grad n = 2 hat als Graph

☐	eine Parabel.	☒	eine Gerade.
☐	einen Punkt?.	☐	eine Funktion vom Grad n = 3.

6.) Ableitung mit der h-Methode

Bilden Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen mittels der h-Methode:

a) $f(x) = \frac{1}{2}x$

Lösung:

$$m_{Tan} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{2}(x+h)-\frac{1}{2}x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}h-\frac{1}{2}x}{h}$$

$$m_{Tan} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{2}h}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{2} = \frac{1}{2} = f'(x)$$

b) $f(x) = 3x^2$

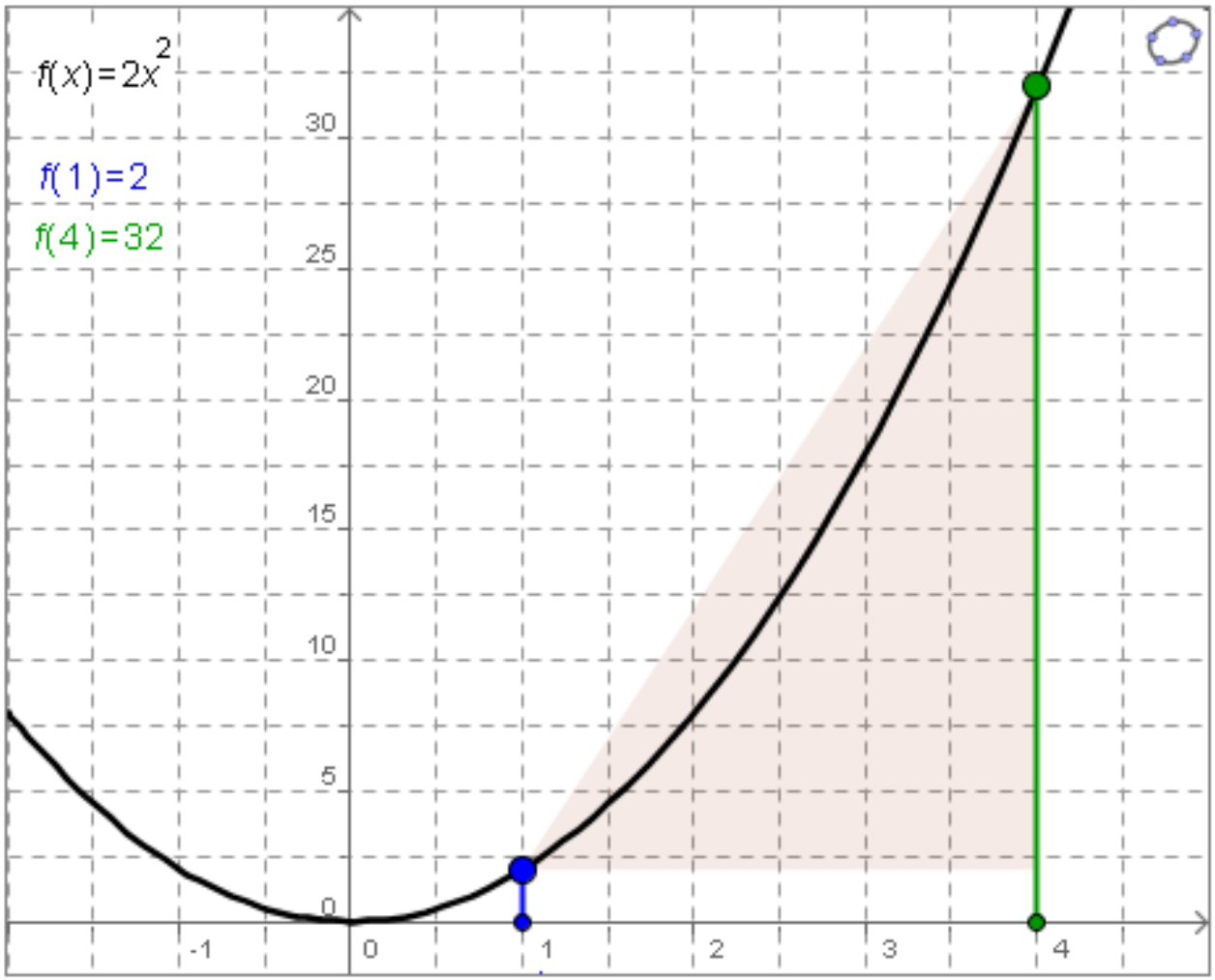
Lösung:

$$m_{Tan} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{3(x+h)^2-3x^2}{h}$$

$$m_{Tan} = \lim_{h\to 0}\frac{3(x^2+2xh+h^2)-3x^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{3x^2+6xh+3h^2-3x^2}{h}$$

$$m_{Tan} = \lim_{h\to 0}\frac{h(6x+3h)}{h} = \lim_{h\to 0}(6x+3h) = 6x = f'(x)$$

7.) Steigung einer Funktion in der Umgebung eines Punktes



Gegeben sei das obige Ausgangsbild.

a) Beschreiben Sie das Ausgangsbild und erklären Sie ausführlich die Arbeitsschritte bis zur Ermittlung der 1. Ableitung an der Stelle x = 1.

Achten Sie dabei auf korrekte Ausdrucksformen und die mathematische Fachterminologie!

Verwenden Sie hierfür u.a. folgende Begriffe:

Differenzenquotient; Differentialquotient; Steigung; Sekante; Tangente; Grenzwert; h-Methode

Lösung:

Ist *f(x)* eine ***reelle Funktion***, und sind x_0 und x_1 Zahlen, so dass *f(x)* im gesamten ***Intervall*** $[x_0, x_1]$ definiert ist, so heißt die Größe $\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$ ***Differenzen-***

quotient. Geometrisch stellt er den ***Anstieg*** der ***Geraden*** durch die Punkte (x_0, $f(x_0)$) und (x_1, $f(x_1)$) des Graphen von $f(x)$ [= Sekante] dar und kann als ***mittlere/durchschnittliche Änderungsrate*** von $f(x)$ im Intervall [x_0, x_1] interpretiert werden.
Mit den Abkürzungen $\Delta x = x_1 - x_0$ und $\Delta f = f(x_1) - f(x_0)$ schreibt er sich einfach als $\frac{\Delta f}{\Delta x}$, was seinen Charakter als ***Quotient von Differenzen*** unterstreicht. Die Grenzlage der Sekante wird dann zur Tangente.

Zur Berechnung der Ableitung von $f(x)$ an der Stelle x wird der ***Differenzenquotient*** auch in der Form $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ angeschrieben, wobei h positiv oder negativ sein kann. Der ***Grenzwert*** $h \to 0$ dieser Größe ist - wenn er existiert - die Ableitung $f'(x)$ und nennt sich ***Differentialquotient***, definiert durch $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.
Dieses Berechungsverfahren nennt man h-Methode.
Der gesamte Themenkomplex dieses Zweigs der Mathematik gehört zur sogenannten ***Differentialrechnung***.

b) Welchen Wert hat die Ableitung an der Stelle x = 1?

Lösung: $f'(x) = 4x \xrightarrow{x=1} f'(1) = 4 = m$

c) Berechnen Sie eine Näherung mittels der Sekantensteigungen an die Stelle x = 1 mit den x_2-Werten x_2 = {4; 2; 1,1 und 1,01}

Lösung:

1.) $m_{Sek} = \frac{32-2}{4-1} = \frac{30}{3} = 10$

2.) $m_{Sek} = \frac{8-2}{2-1} = \frac{6}{1} = 6$

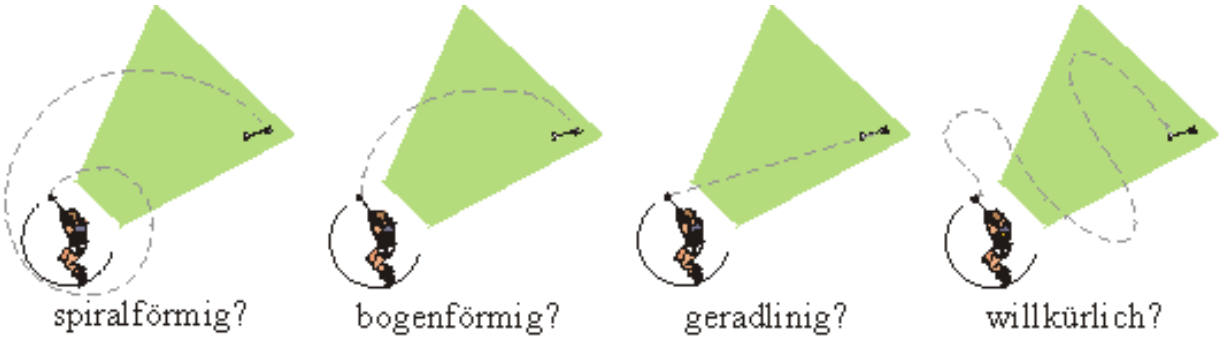
3.) $m_{Sek} = \frac{2,42-2}{1,1-1} = \frac{0,42}{0,1} = 4,2$

4.) $m_{Sek} = \frac{2.0402-2}{1,01-1} = \frac{0,0402}{0,01} = 4,02$

8.) **Sachaufgabe zu Ableitung(en):** Flugbahn beim Hammerwurf

a) Welche Flugbahn wird ein Hammer zurücklegen?

Kreuzen Sie die richtige Lösung an und begründen Sie Ihre Meinung aus mathematischer Sicht!

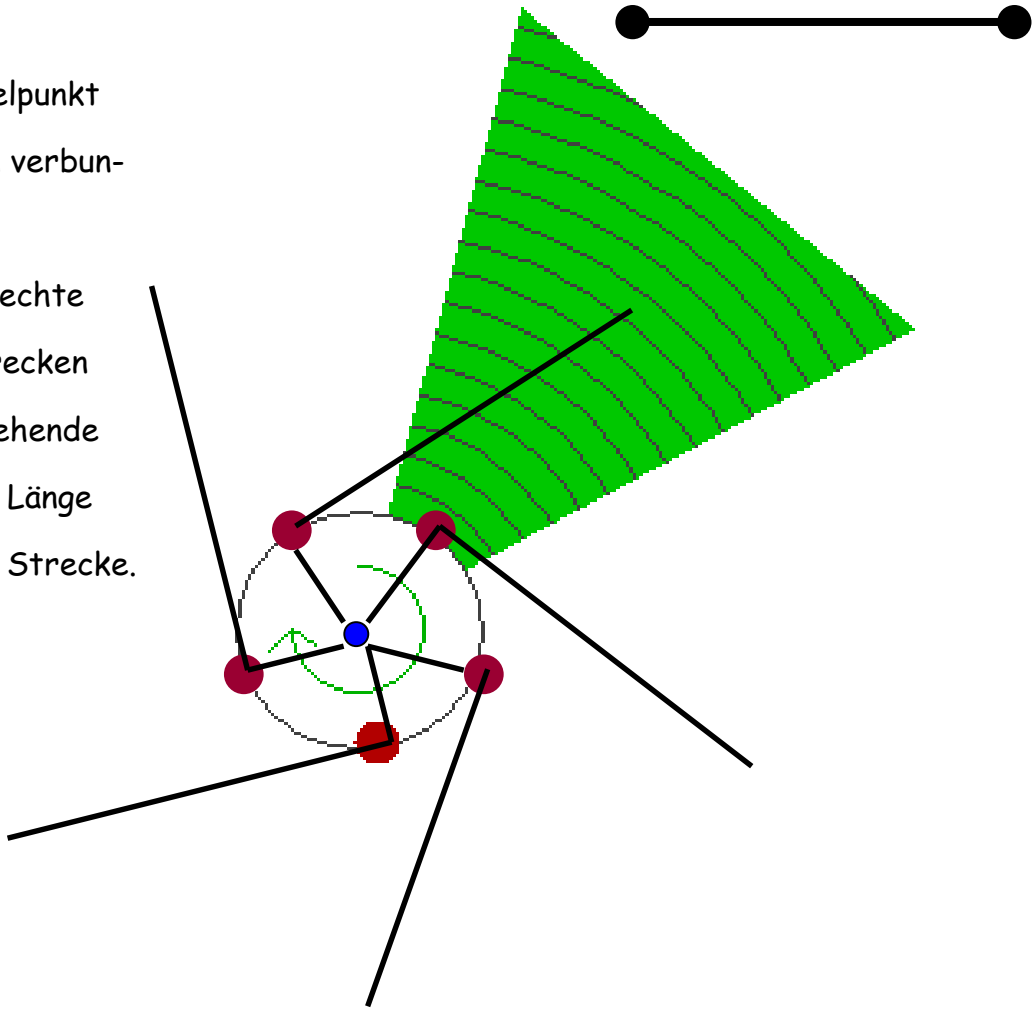


Lösung: Der Hammer wird geradlinig bzw. tangential zur Kreisbewegung wegfliegen.

b) **Konstruieren** Sie die Flugbahn des Hammers beim Hammerwerfen ausgehend von den verschiedenen Wurfpositionen, der Wurflänge und der Tatsache, dass der Werfer im Mittelpunkt des Abwurfkreises steht.

Lösung:

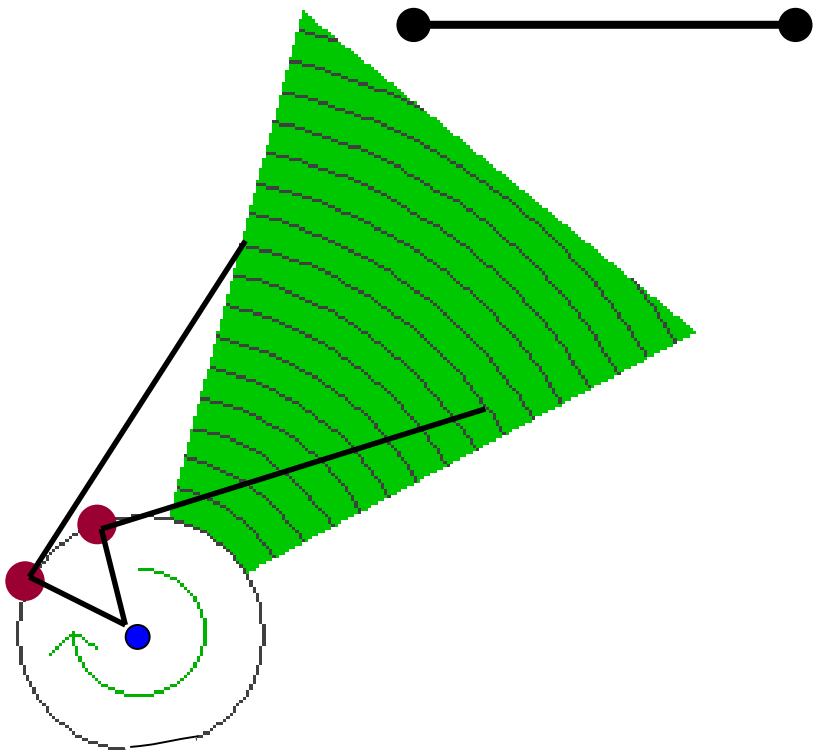
Zuerst muss der Mittelpunkt mit den Abwurfstellen verbunden werden; danach wird die Senkrechte zu den Verbindungsstrecken konstruiert; die entstehende Tangente hat dann die Länge der oben angegebenen Strecke.



c) In welchem Bereich des Kreisbogens wird der Hammer nach dem Loslassen den Sektor treffen?

Konstruieren Sie die Flugbahnen ausgehend davon, dass der Werfer im Mittelpunkt des Abwurfkreises steht.

Lösung:



Zuerst muss der Mittelpunkt mit den Abwurfstellen verbunden werden; danach wird die Senkrechte zu den Verbindungsstrecken konstruiert; die beiden entstehenden Tangenten haben dann die Länge der oben angegebenen Strecke.
Zwischen den beiden Abwurfpunkten muss dann der Hammer weggeschleudert werden, damit er im Sektor landen kann.