

**Thema: LGS; Determinanten**

---

**1.) Determinante**

Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{Lösung:} \quad \text{Det}(A) = 5$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{Lösung:} \quad \text{Det}(B) = -5$$

$$C_k = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 3 \\ 2 & k & 5 \\ k & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Lösung:} \quad \text{Det}(C_k) = -3k^2 - 9k + 54$$

**2.) Lineare Gleichungssysteme**a) Lösen Sie das LGS für k = 2:

$$\begin{pmatrix} -k & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ k & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 25 \\ 10 \end{pmatrix}$$

**Lösung:**

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 25 \\ 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Cramer}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$x = \frac{32}{16} = 2 \quad y = \frac{16}{16} = 1 \quad z = \frac{64}{16} = 4$$

b) Für welchen Wert von  $k$  ist das LGS nicht eindeutig lösbar?

Zeigen Sie, dass das System für diesen Wert keine Lösung besitzt.

$$\begin{pmatrix} -k & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ k & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 25 \\ 10 \end{pmatrix}$$

**Lösung:**

$$\text{Det} \begin{pmatrix} -k & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ k & 2 & 1 \end{pmatrix} = k+14 \stackrel{!}{=} 0 \leftrightarrow k = -14$$

$\Rightarrow$  LGS eindeutig lösbar  $\forall k \in \mathbb{R} \setminus \{-14\}$

Lösung für  $k = -14$ :

$$\begin{aligned} 14 x_1 - x_2 + 3 x_3 &= 7 \quad (1) \\ 2 x_1 + x_2 + 5 x_3 &= 25 \quad (2) \\ -14 x_1 + 2 x_2 + x_3 &= 10 \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 - 1/14 x_2 + 3/14 x_3 &= 1/2 \quad (1) \\ 2 x_1 + x_2 + 5 x_3 &= 25 \quad (2) \\ -14 x_1 + 2 x_2 + x_3 &= 10 \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 - 1/14 x_2 + 3/14 x_3 &= 1/2 \quad (1) \\ 8/7 x_2 + 32/7 x_3 &= 24 \quad (2) \\ -14 x_1 + 2 x_2 + x_3 &= 10 \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 - 1/14 x_2 + 3/14 x_3 &= 1/2 \quad (1) \\ 8/7 x_2 + 32/7 x_3 &= 24 \quad (2) \\ x_2 + 4 x_3 &= 17 \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 - 1/14 x_2 + 3/14 x_3 &= 1/2 \quad (1) \\ x_2 + 4 x_3 &= 21 \quad (2) \\ x_2 + 4 x_3 &= 17 \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 1/2 x_3 &= 2 \quad (1) \\ x_2 + 4 x_3 &= 21 \quad (2) \\ x_2 + 4 x_3 &= 17 \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 1/2 x_3 &= 2 \quad (1) \\ x_2 + 4 x_3 &= 21 \quad (2) \\ 0 &= -4 \quad (3) \end{aligned}$$

**Keine Lösung**