Musterlösung **12. Jgst.** **5. Test** **Datum: 19.03.2010**

Klasse: GY GS 09-08 **Fach: Mathematik (Grundfach)**

Thema: Matrizenrechnung; Rechengesetze

1.) Erstellen von Matrizen

Erstellen Sie eine 4x4-Matrix, für deren Elemente folgendes gilt:

a) $a_{i\,j} = i \cdot j$

Lösung:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{pmatrix}$$

b) $a_{i\,j} = \begin{cases} j & \text{für } i \le j \\ i - j & \text{sonst} \end{cases}$

Lösung:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

2.) Interpretation von Matrizen

Ute, Heinrich und Renate haben zu einer Party eingeladen. Sie haben unabhängig von einander Getränke eingekauft, und zwar Wasser (5), Saft (6), Cola (12,5) und Sekt (8).

Die Zahlen in den Klammern sind die Preise für je eine Mengeneinheit der Getränke.

Aus den Einkäufen kann folgende Matrix gebildet werden:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

a) Wie kann die Matrix A anhand der gegebenen Umstände interpretiert werden?

Lösung: Die drei Zeilen entsprechen den drei Personen; die Spalten dokumentieren Mengen der jeweiligen Getränkesorte

b) Wie viel hat jeder für die Getränke ausgegeben?

Lösung:

$$
\begin{array}{cccc|r}
 & & & & 5 \\
 & & & & 6 \\
 & & & & 12{,}5 \\
 & & & & 8 \\
\hline
3 & 1 & 3 & 2 & 15+6+37{,}5+16=74{,}5 \\
4 & 2 & 5 & 1 & 20+12+62{,}5+8=102{,}5 \\
2 & 6 & 4 & 5 & 10+36+50+40=136{,}0
\end{array}
$$

3.) Fragestellungen zu Matrizen

a) Die Hauptdiagonale einer quadratischen Matrix besteht aus 1.000 Elementen.

(i) Wie viele Elemente hat die Matrix?

(ii) Wie viele Elemente stehen unterhalb der Hauptdiagonalen?

Lösung: Die Matrix hat 1.000 * 1.000 = 1.000.000 Elemente.

Unterhalb der Hauptdiagonale stehen

$$\frac{1.000 \cdot 1.000 - 1.000}{2} = 499.500 \; Elemente$$

b) Definieren Sie den Begriff Dreiecksmatrix.

Lösung:

Die Dreiecksmatrix gibt es in zwei verschiedenen Formen – als obere/untere Dreiecksmatrix.

Unter einer oberen Dreiecksmatrix versteht man eine quadratische Matrix, bei der alle Elemente unterhalb der Hauptdiagonalen den Wert 0 besitzen.

Bei der unteren Dreiecksmatrix sind die Elemente oberhalb der Hauptdiagonalen 0.

c) Welche Matrix wird hier beschrieben (mit Begründung):

$$\boxed{\begin{array}{l} a_{ij} = 1 \quad \forall\, i = j \quad \wedge \quad a_{ij} = 0 \quad \forall\, i \neq j \\ mit\left(1 \leq i \leq n \;\wedge\; 1 \leq j \leq n \;\wedge\; i, j \in N^*\right) \end{array}}$$

Lösung:

Es handelt sich um die Einheitsmatrix, da nur die Zahlenwerte 1 und 0 vorkommen, die Matrix quadratisch sein muss und die Einsen nur auf der Hauptdiagonalen zu finden sind, während außerhalb der Hauptdiagonalen nur 0-Elemente stehen dürfen.

d) Vervollständigen Sie den Lückentext:

Unter einer Matrix (Plural: Matrizen) versteht man ein Schema bestehend aus Zeilen und Spalten, dessen Elemente üblicherweise Zahlen, aber auch andere mathematische Elemente wie Variablen oder Funktionen sein können.
Sind in einer Matrix die Zeilen- und Spaltenanzahl gleich, so ist ihre Form quadratisch und man bezeichnet sie als quadratische Matrix ;
die Diagonale von oben links nach unten rechts heißt Hauptdiagonale.
Matrizen werden mit lateinischen Großbuchstaben benannt, während die Elemente mit lateinischen Kleinbuchstaben dargestellt werden.
Allgemein bezeichnet man eine Matrix mit m Zeilen und n Spalten als (m x n)-Matrix bzw. vom Format (m, n).

Hier sind die zu verwendenden Begriffe:

Matrix (2)	*Zeilen (2)*	*links*	*quadratisch*	*Format (m, n)*	*Hauptdiagonale*
rechts	*Matrizen*	*Großbuchstaben*	*Spalten (2)*	*(m x n)-Matrix*	
lateinischen Kleinbuchstaben		*Elemente*		*quadratische Matrix*	

4.) Rechnen mit Matrizen

Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke mit den gegebenen Matrizen:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$a)\quad 2AB+3B^2 \qquad b)\quad A^3 \qquad c)\quad A\cdot C \qquad d)\quad (B+E)^2\cdot(A-2\cdot E)$

<u>Lösung:</u>

$$a)\quad 2AB+3B^2 = \begin{pmatrix} 40 & 12 \\ 60 & -6 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 45 & 0 \\ 0 & 45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 85 & 12 \\ 60 & 39 \end{pmatrix}$$

$NR.:$

$$\begin{array}{cc|cc} \multicolumn{2}{c|}{2A\cdot B} & 0 & 3 \\ & & 5 & 0 \\ \hline 4 & 8 & 40 & 12 \\ -2 & 12 & 60 & -6 \end{array} \qquad \begin{array}{cc|cc} \multicolumn{2}{c|}{B\cdot B} & 0 & 3 \\ & & 5 & 0 \\ \hline 0 & 3 & 15 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 15 \end{array} \xrightarrow{\cdot 3} \begin{pmatrix} 45 & 0 \\ 0 & 45 \end{pmatrix}$$

$$b)\quad A^3 = \begin{pmatrix} -32 & 192 \\ -48 & 160 \end{pmatrix}$$

$NR.:$

$$\begin{array}{cc|cc} \multicolumn{2}{c|}{A\cdot A} & 2 & 4 \\ & & -1 & 6 \\ \hline 2 & 4 & 0 & 32 \\ -1 & 6 & -8 & 32 \end{array} \qquad \begin{array}{cc|cc} \multicolumn{2}{c|}{A^2\cdot A} & 2 & 4 \\ & & -1 & 6 \\ \hline 0 & 32 & -32 & 192 \\ -8 & 32 & -48 & 160 \end{array}$$

$$c)\quad A\cdot C = \begin{pmatrix} -2 & 14 & 16 \\ -7 & 17 & 8 \end{pmatrix}$$

$NR.:$

$$\begin{array}{cc|ccc} \multicolumn{2}{c|}{A\cdot C} & 1 & 1 & 4 \\ & & -1 & 3 & 2 \\ \hline 2 & 4 & -2 & 14 & 16 \\ -1 & 6 & -7 & 17 & 8 \end{array}$$

$$d)\quad (B+E)^2\cdot(A-2\cdot E) = \begin{pmatrix}16&6\\10&16\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&4\\-1&4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6&88\\-16&104\end{pmatrix}$$

$NR.:$

$$\begin{array}{cc|cc} (B+E)^2 & & 1 & 3\\ & & 5 & 1\\ \hline 1 & 3 & 16 & 6\\ 5 & 1 & 10 & 16\end{array}\quad ;\quad (A-2\cdot E) = \begin{pmatrix}0&4\\-1&4\end{pmatrix}\quad ;\quad \begin{array}{cc|cc} & & 0 & 4\\ & & -1 & 4\\ \hline 16 & 6 & -6 & 88\\ 10 & 16 & -16 & 104\end{array}$$

e) Beweisen Sie, dass bei der Matrizenrechnung die 1. Binomische Formel $(A+B)^2 = A^2+2AB+B^2$ nicht gilt.

<u>**Lösung:**</u>

$$(A+B)^2 = \begin{pmatrix}32&56\\32&64\end{pmatrix}$$

$NR.:$

$$\begin{array}{cc|cc} (A+B)^2 & & 2 & 7\\ & & 4 & 6\\ \hline 2 & 7 & 32 & 56\\ 4 & 6 & 32 & 64\end{array}\qquad \begin{array}{cc|cc} B\cdot B & & 0 & 3\\ & & 5 & 0\\ \hline 0 & 3 & 15 & 0\\ 5 & 0 & 0 & 15\end{array}\quad \xrightarrow{\cdot 3}\quad \begin{pmatrix}45&0\\0&45\end{pmatrix}$$

$$A^2+2AB+B^2 = \begin{pmatrix}0&32\\-8&32\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}40&12\\60&-6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}15&0\\0&15\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}55&44\\52&41\end{pmatrix}$$

f) Wie müsste die Matrix B aussehen, damit die Binomische Formel doch gilt? Geben Sie zwei Beispielmatrizen an.

<u>**Lösung:**</u> Wenn B die Einheits- oder die Nullmatrix wäre, würde das Kommutativgesetz gelten.

Allgemeine Herleitung der Bedingung (nicht als Lösung erforderliche!)

$$Bedingung: \quad AB = BA \quad = \begin{pmatrix} 40 & 12 \\ 60 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 45 & 0 \\ 0 & 45 \end{pmatrix} \quad = \begin{pmatrix} 85 & 12 \\ 60 & 39 \end{pmatrix}$$

$NR.:$

$$\begin{array}{cc|cc} A\cdot B & & a & b \\ & & c & d \\ \hline 2 & 4 & 2a+4c & 2b+4d \\ -1 & 6 & -a+6c & -b+6d \end{array} \qquad \begin{array}{cc|cc} B\cdot A & & 2 & 4 \\ & & -1 & 6 \\ \hline a & b & 2a-b & 4a+6b \\ c & d & 2c-d & 4c+6d \end{array}$$

$Bedingungen:$

$I.) \quad 2a+4c = 2a-b \quad \rightarrow \quad 4c = -b \qquad II.) \quad 2b+4d = 4a+6b \quad \rightarrow \quad b = -a+d$

$III.) -a+6c = 2c-d \quad \rightarrow \quad d = a-4c \qquad IV.) \quad -b+6d = 4c+6d \quad \rightarrow \quad 4c = -b$

$$\rightarrow \quad d = a+b \quad und \quad c = -\frac{1}{4}b$$

$$\rightarrow \quad B \quad = \begin{pmatrix} a & b \\ -\frac{1}{4}b & a+b \end{pmatrix}$$