Musterlösung **12. Jgst.** **1. Test** **Datum: 22.09.2009**

Klasse: GY GS 09-08 **Fach: Mathematik (Grundfach)**

Thema: **Ganzrat. Funktionen mit Parameter; Produkt-, Quotienten- & Kettenregel**

1.) Ableitungen

Bilden Sie jeweils die erste Ableitung der gegebenen Funktionen und vereinfachen Sie die Ergebnisse so weit wie möglich und sinnvoll:

a) $f(x) = \frac{2}{5}x^3 - \frac{1}{3}x + 1$

Lösung: $f'(x) = \frac{6}{5}x^2 - \frac{1}{3}$

b) $f_t(x) = \frac{1}{t^2}x^4 - \frac{1}{2}tx^2 + t^3x - 4t$

Lösung: $f_t'(x) = \frac{4}{t^2}x^3 - tx + t^3$

c) $f_t(x) = \frac{tx^3 - 2x^2 + 3}{x^2}$

Lösung:

$$f_t(x) = \frac{tx^3}{x^2} - \frac{2x^2}{x^2} + \frac{3}{x^2} = tx - 2 + \frac{3}{x^2} \Rightarrow f_t'(x) = t - \frac{6}{x^3}$$

d) $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x}$

Lösung:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 4x} = \left(x^2 + 4x\right)^{0,5} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x + 4}{2\sqrt{x^2 + 4x}}$$

e) $f(x) = \left(3x^4 - 5x^2\right)\left(2x^4 + x^2\right)$

Lösung:

$$f'(x) = \left(12x^3 - 10x\right)\left(2x^4 + x^2\right) + \left(3x^4 - 5x^2\right)\left(8x^3 + 2x\right)$$

f) $f_t(x) = \left(x^2 + tx - t^2\right)^4$

Lösung: $f_t'(x) = 4\left(x^2 + tx - t^2\right)^3 \cdot \left(2x + t\right)$

g) $f_t(x) = \left(x^3 - tx\right)^{2n}$

Lösung: $f_t'(x) = 2n\left(x^3 - tx\right)^{2n-1} \cdot \left(3x^2 - t\right)$

h) $f_t(x) = \dfrac{3x^2 - 4tx + 1}{x^2 + x}$

Lösung:

$$f_t'(x) = \frac{\left(6x - 4t\right)\left(x^2 + x\right) - \left(3x^2 - 4tx + 1\right)\left(2x + 1\right)}{\left(x^2 + x\right)^2}$$

2.) Ganzrationale Funktionen mit Parameter

Gegeben sei folgende Funktion: $f_t(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}tx^2 \quad mit \quad t \in \Re^+$

a) Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion.

Lösung: $f_t(x) = x^2\left(\frac{1}{6}x - \frac{1}{2}t\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \wedge x_2 = 3t$

b) Ermitteln Sie das Maximum und das Minimum der Funktion?

Lösung:

$$f_t'(x) = \frac{1}{2}x^2 - tx = x\left(\frac{1}{2}x - t\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \quad und \quad x_2 = 2t$$

$$f_t''(x) = x - t$$

$$\Rightarrow f_t''(0) = -t > 0 \Rightarrow Max(0 \mid 0)$$

$$\Rightarrow f_t''(2t) = t > 0 \Rightarrow Min\left(2t \;\middle|\; -\frac{2}{3}t^3\right)$$

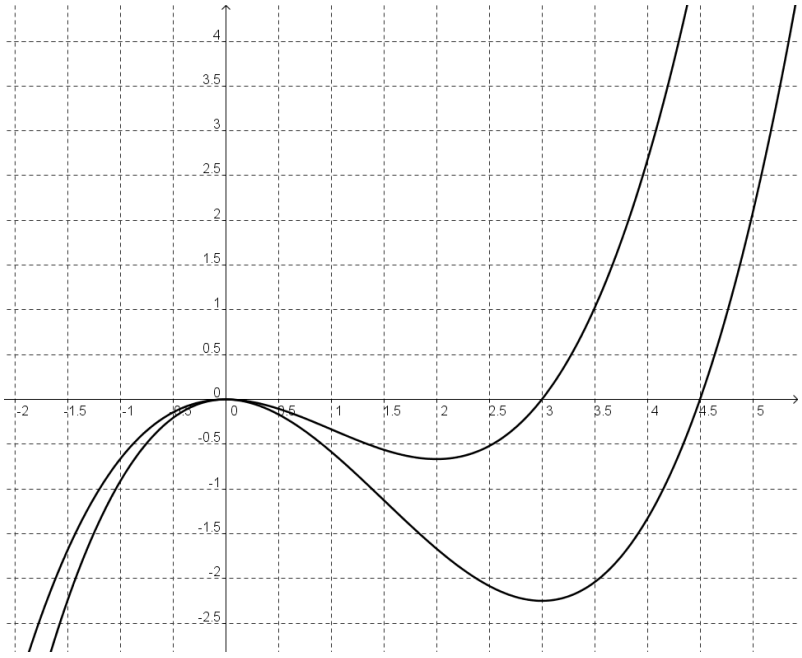
c) Bestimmen Sie den Wendepunkt der Funktion?

Lösung:

$$f_t''(x) = x - t = 0 \Rightarrow x = t$$

$$f_t'''(x) = 1 \neq 0 \Rightarrow WP\left(t \;\middle|\; -\frac{1}{3}t^3\right)$$

d) Für welche beiden Werte von **t** sind die Graphen hier dargestellt?
Mit Begründung!



Lösung: Aufgrund der 2. Nullstelle kann der Wert für **t** berechnet werden:

$$Nullstelle\ x_2: \quad 3t = 3 \Rightarrow t_1 = 1$$

$$Nullstelle\ x_2: \quad 3t = \frac{9}{2} \Rightarrow t_2 = \frac{3}{2}$$