Musterlösung **12. Jgst.** **6. Test** **Datum: 07.06.2010**

Klasse: GY GS 02-08 **Fach: Mathematik (Grundfach)**

Thema: LGS; Inverse Matrix; Lineare Optimierung

1.) Invertierung von Matrizen

a) Invertieren Sie folgende Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 & -0,6 \\ -0,2 & 0,4 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -5 & 4 & -2 \\ 10 & -11 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0,4 & -0,2 \\ 1 & -0,8 & 0,4 \\ -2 & 2,2 & -0,6 \end{pmatrix}$$

b) Für welche Werte von k ist die Matrix invertierbar?

$$C_k = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 3 \\ 2 & k & 5 \\ k & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Determinante bestimmen:

$$\det(C_k) = -3k^2 - 9k + 54 \overset{!}{=} 0 \quad \leftrightarrow \quad k_1 = -6 \quad \wedge \quad k_2 = 3$$

$$\Rightarrow \quad C_k \textit{ invertierbar} \quad \Leftrightarrow \quad k \in \Re \setminus \{-6\,;3\}$$

2.) Lineare Gleichungssysteme

a) Was ist ein homogenes LGS?

Lösung: Unter einem hLGS versteht man ein System der Form: $A\vec{x} = \vec{0}$

b) Nennen Sie zwei Unterschiede zwischen einem hLGS und einem inhomogenen LGS.

Lösung: (1) Nullvektor als Ergebnisvektor

(2) mögliche Ergebnismengen:

Beim hLGS gibt es entweder eine bestimmte oder eine unendlich große Lösungsmenge.

Beim inhomogenen LGS gibt es zusätzlich noch die leere Lösungsmenge.

c) Lösen Sie das LGS für **k = 1**:

$$\begin{pmatrix} -4 & -1 & 3 \\ 2 & k & 5 \\ k & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 19 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\begin{pmatrix} -4 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 19 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

3.) Lineare Optimierung

a) Hühner und Enten

Ein Landwirt verkauft **x Hühner** und **y Enten**.

(1) Er kann täglich von beiden Tierarten zusammen höchstens 20 Tiere verkaufen;

(2) von den Enten höchstens 12.

(3) Die Futtermittelkosten pro Tag zur Aufzucht eines Huhnes betragen 0,50 Euro; für eine Ente 1,5 Euro; insgesamt sollen sie für die täglich verkauften Tiere höchstens 25 Euro betragen.

(ZF) Das Huhn wird für 5 Euro und die Ente für 8 Euro verkauft.

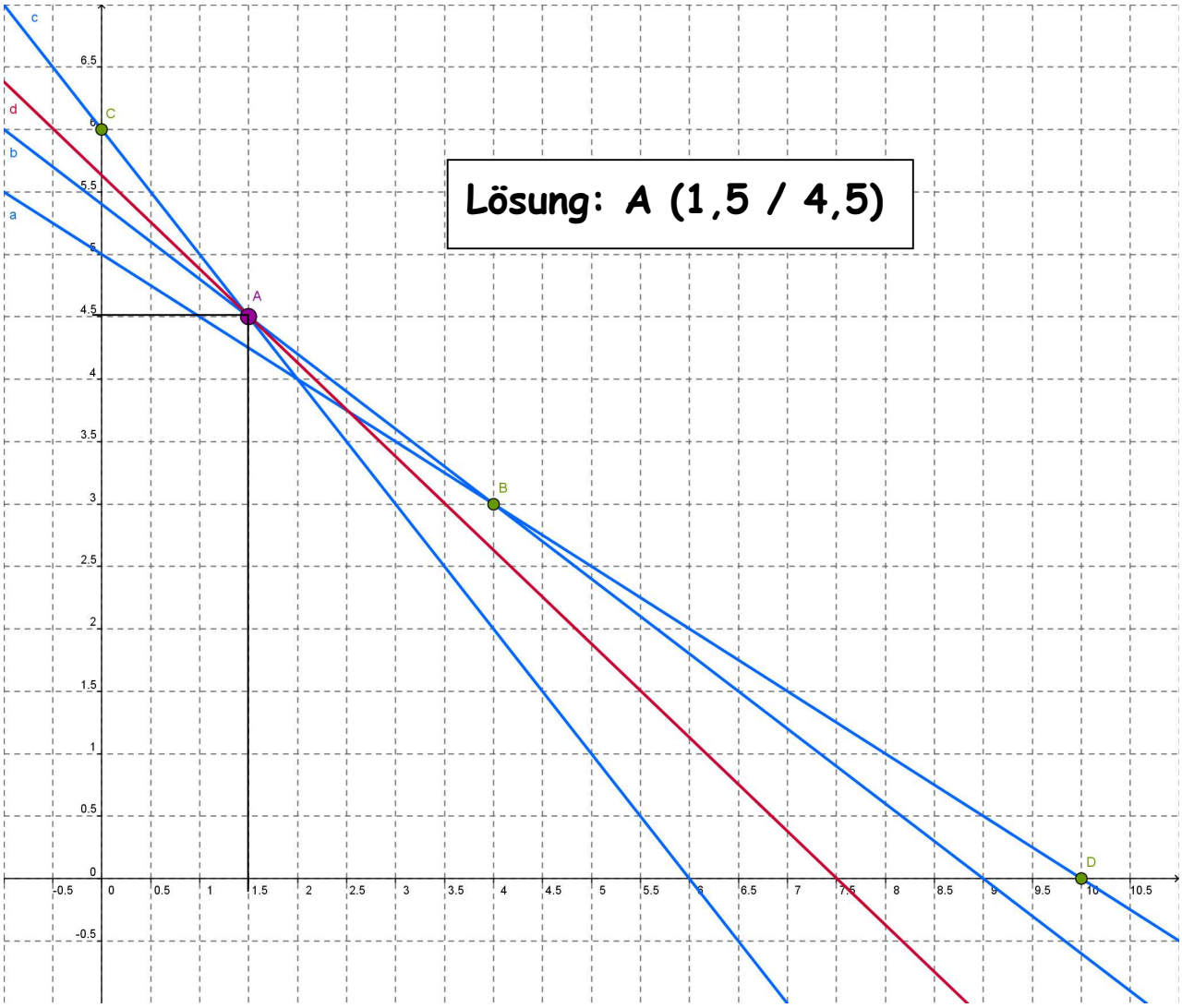
=> **Bilden Sie die notwendigen Ansätze.**

Lösung: (1) $x + y \leq 20$ (2) $y \leq 12$

(3) $0,5x + 1,5y \leq 25$ (ZF) $5x + 8y \rightarrow \max.$

b) Lösen Sie das Minimierungsproblem (mit Erläuterung)

(1) $x \geq 0;\quad y \geq 0$ (2) $5x + 10y \geq 50$

(3) $3x + 5y \geq 27$ (4) $4x + 4y \geq 24$

(5) $Z(x, y) = 3x + 4y \rightarrow \min$