Musterlösung **12. Jgst.** **5. Test** **Datum: 22.03.2010**

Klasse: GY GS 02-08 **Fach: Mathematik (Grundfach)**

Thema: Matrizenrechnung; Rechengesetze

1.) Bildungsgesetze von Matrizen

Erstellen Sie eine 4x4-Matrix, für deren Elemente folgendes gilt:

$$a_{ij} = \begin{cases} j^i & \text{für } i \le j \\ i + j & \text{sonst} \end{cases}$$

Lösung:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 9 & 16 \\ 4 & 5 & 27 & 64 \\ 5 & 6 & 7 & 256 \end{pmatrix}$$

2.) Interpretation von Matrizen

Bäcker Kunibert stellt jeden Tag drei besondere Sorten Brot her. Dazu verwendet er Hefe (0,30), Wasser (0,10), Mehl (2,50) und eine geheime Zutat (0,80), die hier nicht verraten werden darf.
Die Zahlen in den Klammern sind die Preise für je eine Mengeneinheit der Ingredienzien.
Aus der Pruduktion kann folgende Matrix gebildet werden:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

a) Wie kann die Matrix A anhand der gegebenen Umstände interpretiert werden?

Lösung: Die drei Zeilen entsprechen den drei Brotsorten;
die Spalten dokumentieren die Mengen die zur Herstellung jeweils einer Mengeneinheit jeder Brotsorte notwendig sind

b) Wie viel kostet jedes Brot in der Herstellung?

Lösung:

				$0,30$
				$0,10$
				$2,50$
				$0,80$
3	1	3	2	$0,90+0,10+7,50+1,60=10,10$
4	2	5	1	$1,20+0,20+12,50+0,80=14,70$
2	6	4	5	$0,60+0,60+10,00+4,00=15,20$

3.) Fragestellungen zu Matrizen

a) Die Hauptdiagonale einer quadratischen Matrix besteht aus 500 Elementen.

(i) Wie viele Elemente hat die Matrix?
(ii) Wie viele Elemente stehen unterhalb der Hauptdiagonalen?

Lösung: Die Matrix hat 500 * 500 = 250.000 Elemente.

Unterhalb der Hauptdiagonale stehen

$$\frac{500 \cdot 500 - 500}{2} = 124.750 \; Elemente$$

b) Definieren Sie den Begriff **Einheitsmatrix**.

Lösung:

Die Einheitsmatrix ist eine quadratische Matrix, bei der nur die Zahlenwerte 1 und 0 vorkommen; auf der Hauptdiagonalen sind nur Einsen zugelassen, während außerhalb der Hauptdiagonalen nur 0-Elemente stehen dürfen.

c) Welche Matrix wird hier beschrieben (mit Begründung):

Die Matrix heißt ... mit

$$a_{ij} = 0 \quad \forall\, i > j \quad mit \left(1 \le i \le n \;\wedge\; 1 \le j \le n \;\wedge\; i, j \in N^*\right)$$

Lösung:

Es handelt sich um eine obere Dreiecksmatrix, da es eine quadratische Matrix ist und alle Elemente unterhalb der Hauptdiagonalen den Wert 0 besitzen.

4.) Rechnen mit Matrizen

Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke mit den gegebenen Matrizen:

$$A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -1 & 4\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 4 & 0\end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix}2 & -3 & 1\\ -4 & 5 & 3\end{pmatrix}$$

$a)\ \ 3A-2B \qquad b)\ \ B^3 \qquad c)\ \ A^T\cdot C \qquad d)\ \ (B+E)\cdot(A-E)^T$

Lösung:

$$a)\ \ 3A-2B = \begin{pmatrix}9 & 6\\ -3 & 12\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 4\\ 8 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9 & 2\\ -11 & 12\end{pmatrix}$$

$$b)\ \ B^3 = \begin{pmatrix}0 & 16\\ 32 & 0\end{pmatrix}$$

$NR.:$

$B\cdot B$		0	2
		4	0
0	2	8	0
4	0	0	8

$B^2\cdot B$		0	2
		4	0
8	0	0	16
0	8	32	0

$$c)\ \ A^T\cdot C = \begin{pmatrix}10 & -14 & 0\\ -12 & 14 & 14\end{pmatrix}$$

$NR.:$

$A^T\cdot C$		2	−3	1
		−4	5	3
3	−1	10	−14	0
2	4	−12	14	14

$$d)\quad (B+E)\cdot(A-E)^T \;=\; \begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix}6 & 5\\ 10 & -1\end{pmatrix}$$

NR.:

		2	−1
		2	3
1	2	6	5
4	1	10	−1