Musterlösung **12. Jgst.** **2. Test** **Datum: 23.11.2009**

Klasse: GY GS 02-08 **Fach: Mathematik (Grundfach)**

Thema: Newton-Verfahren; Rekonstruktion ganzrationaler Funktionen

---

1.) Newton-Iteration

a) Berechnen Sie die Nullstelle dieser Funktion mittels zweier Iterationen:

$$f(x) = x^3 - 3x + 2{,}5$$

Lösung:

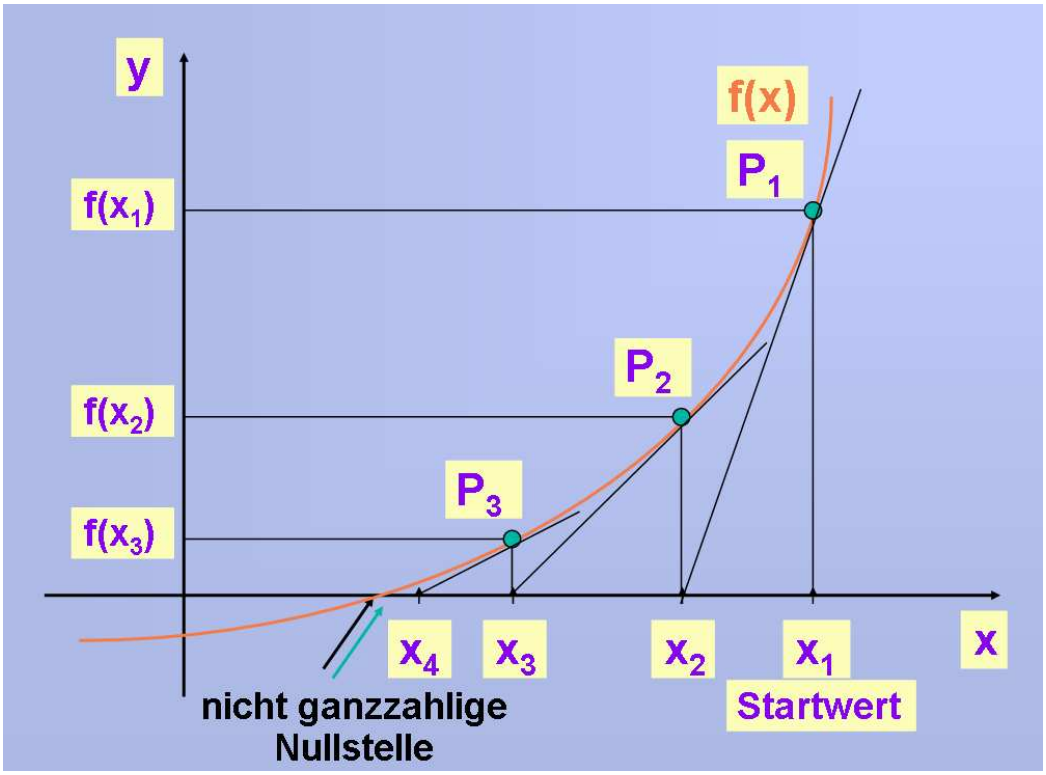
Nullstelle: x = - 2,053623 Startwert: x = - 2

n	x_{n+1}	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_n - f(x_n)/f'(x_n)$
0	-2	0.5	9	-2.055555
1	-2.055555	-0.018689986	9.675925925	-2.053623

b) Erläutern Sie die Herleitung der Formel zur Newton-Iteration (in graphischer und verbaler Form).

Lösung:

Iterationsverfahren zur Bestimmung (nicht – ganzzahliger) Nullstellen von Funktionen



Vorgehensweise:

(1) Startwert x_0 festlegen

(2) Folgewerte mit Formel ermitteln:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad mit \quad f'(x_n) \neq 0$$

c) Welche Voraussetzung muss erfüllt sein, damit die Iterations-Formel anwendbar ist?

Lösung: $$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad mit \quad f'(x_n) \neq 0$$

d) Wie könnte man den Wert von $\sqrt{3}$ mit der Newton-Iteration bestimmen?

Lösung: Die Nullstelle der Parabel $f(x) = x^2 - 3$ mit dem Newton-Verfahren berechnet würde den Wert $\sqrt{3}$ darstellen.

2.) Rekonstruktion ganzrationaler Funktionen

a) Wie viele Bedingungsgleichungen benötigt man, um eine ganzrationale Funktion von Grad 4 eindeutig bestimmen zu können? (mit Begründung!)

Lösung:

Da die allgemeine Funktionsvorschrift $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ insgesamt fünf zu bestimmende Parameter enthält, müssen auch fünf unabhängige Bestimmungsgleichungen existieren.

b) Eine Parabel 3. Ordnung hat in P (1 / 4) eine waagrechte Tangente und in Q (0 / 2) ihren Wendepunkt.

Lösung:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \qquad und \qquad f''(x) = 6ax + 2b$$

$$I.)\quad f(1) = a + b + c + d = 4$$

$$II.)\quad f'(1) = 3a + 2b + c = 0$$

$$III.)\quad f(0) = d = 2$$

$$IV.)\quad f''(0) = 2b = 0 \Rightarrow b = 0$$

$$\xrightarrow{b,d\ eingesetzt}$$

$$I.)\quad a + c + 2 = 4 \Rightarrow a + c = 2$$

$$II.)\quad 3a + c = 0 \Rightarrow c = -3a$$

$$\xrightarrow{c\ eingesetzt} \quad a - 3a = 2 \Rightarrow a = -1 \Rightarrow c = 3$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = -x^3 + 3x + 2$$

c) Die folgenden Ansätzen beschreiben eine Funktion 3. Ordnung.
Welche Eigenschaften sind hier verwendet bzw. eingesetzt worden?

(1) $f(???) = -8a+4b-2c+d = 5$

(2) $f'(???) = 12a-4b+c = 0$

(3) $f(???) = d = 1$

(4) $f'(???) = \frac{4}{3}a+\frac{4}{3}b+c = 0$

(5) $f''(???) = -4a+2b = 0$

Lösung:

$f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$

$f'(x) = 3ax^2+2bx+c$ *und* $f''(x) = 6ax+2b$

(1) $f(-2) = -8a+4b-2c+d = 5 \Rightarrow P(-2 \mid 5)$

(2) $f'(-2) = 12a-4b+c = 0$
$\Rightarrow$ *horizontale* Steigung bei x = -2

(3) $f(0) = d = 1 \Rightarrow Q(0 \mid 1)$

(4) $f'\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3}a+\frac{4}{3}b+c = 0$
$\Rightarrow$ *horizontale* Steigung bei x = $\frac{2}{3}$

(5) $f''\left(-\frac{2}{3}\right) = -4a+2b = 0$
$\Rightarrow$ *Wendestelle* bei x = $-\frac{2}{3}$