Musterlösung	**12. Jgst.**	**1. Test**	**Datum: 21.09.2009**
	Klasse: GY GS 02-08	**Fach: Mathematik (Grundfach)**	

Thema: **Ganzrat. Funktionen mit Parameter; Produkt-, Quotienten- & Kettenregel**

1.) Ableitungen

Bilden Sie jeweils die erste Ableitung der gegebenen Funktionen und vereinfachen Sie die Ergebnisse so weit wie möglich und sinnvoll:

a) $$f(x) = 4x^3 - 3x + 1$$

Lösung: $$f'(x) = 12x^2 - 3$$

b) $$f_t(x) = t^2x^4 - 2tx^2 + t^3 - 2$$

Lösung: $$f_t'(x) = 4t^2x^3 - 4tx$$

c) $$f_t(x) = \frac{tx^2 - 2x + 3}{x}$$

Lösung:

$$f_t(x) = \frac{tx^2}{x} - \frac{2x}{x} + \frac{3}{x} = tx - 2 + \frac{3}{x} \Rightarrow f_t'(x) = t - \frac{3}{x^2}$$

d) $$f(x) = \sqrt{x^3 + 4x^2}$$

Lösung:

$$f'(x) = \frac{3x^2 + 8x}{2\sqrt{x^3 + 4x^2}} = \frac{3x^2 + 8x}{2x\sqrt{x + 4}} = \frac{3x + 8}{2\sqrt{x + 4}}$$

e) $$f(x) = \left(x^2 - x\right)\left(3x^4 - 2x^2\right)$$

Lösung:

$$f'(x) = (2x - 1)\left(3x^4 - 2x^2\right) + \left(x^2 - x\right)\left(12x^3 - 4x\right)$$

f) $f_t(x) = \left(3x^2 + tx - t^2\right)^3$

Lösung: $f_t'(x) = 3\left(3x^2 + tx - t^2\right)^2 \cdot (6x + t)$

g) $f_t(x) = \left(x^2 - t\right)^4 \left(1 + tx^2\right)^3$

Lösung:

$$f_t'(x) = 4\left(x^2 - t\right)^3 \cdot 2x \cdot \left(1 + tx^2\right)^3 + \left(x^2 - t\right)^4 \cdot 3 \cdot \left(1 + tx^2\right)^2 \cdot 2tx$$

$$f_t'(x) = 8x \cdot \left(x^2 - t\right)^3 \cdot \left(1 + tx^2\right)^3 + 6tx \cdot \left(x^2 - t\right)^4 \cdot \left(1 + tx^2\right)^2$$

$$f_t'(x) = \left(x^2 - t\right)^3 \cdot \left(1 + tx^2\right)^2 \left[8x \cdot \left(1 + tx^2\right) + 6tx \cdot \left(x^2 - t\right)\right]$$

$$f_t'(x) = \left(x^2 - t\right)^3 \cdot \left(1 + tx^2\right)^2 \left[8x + 8tx^3 + 6tx^3 - 6t^2x\right]$$

$$f_t'(x) = \left(x^2 - t\right)^3 \cdot \left(1 + tx^2\right)^2 \left(14tx^3 - 6t^2x + 8x\right)$$

h) $f_t(x) = \dfrac{x^2 - 2tx + 3}{x + 1}$

Lösung:

$$f_t'(x) = \frac{(2x - 2t)(x + 1) - \left(x^2 - 2tx + 3\right)}{(x + 1)^2}$$

$$f_t'(x) = \frac{2x^2 + 2x - 2tx - 2t - x^2 + 2tx - 3}{(x + 1)^2} = \frac{x^2 + 2x - 2t - 3}{(x + 1)^2}$$

2.) Ganzrationale Funktionen mit Parameter

Gegeben sei folgende Funktion:

$$f_t(x) \quad = \quad -\frac{1}{3}x^3 + tx^2 \quad mit \quad t \in \Re^+$$

a) Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion.

Lösung:

$$f_t(x) \quad = \quad x^2\left(-\frac{1}{3}x + t\right) \quad = \quad 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0 \quad \wedge \quad x_2 = 3t$$

b) Begründen Sie, warum die Funktion immer genau zwei Nullstellen besitzt.

Lösung: Der Wert x_1 ist parameterunabhängig und der Wert x_2 ist aufgrund der Voraussetzung für t in jedem Fall von x_1 verschieden.

c) Ermitteln Sie das Maximum und das Minimum der Funktion?

Lösung:

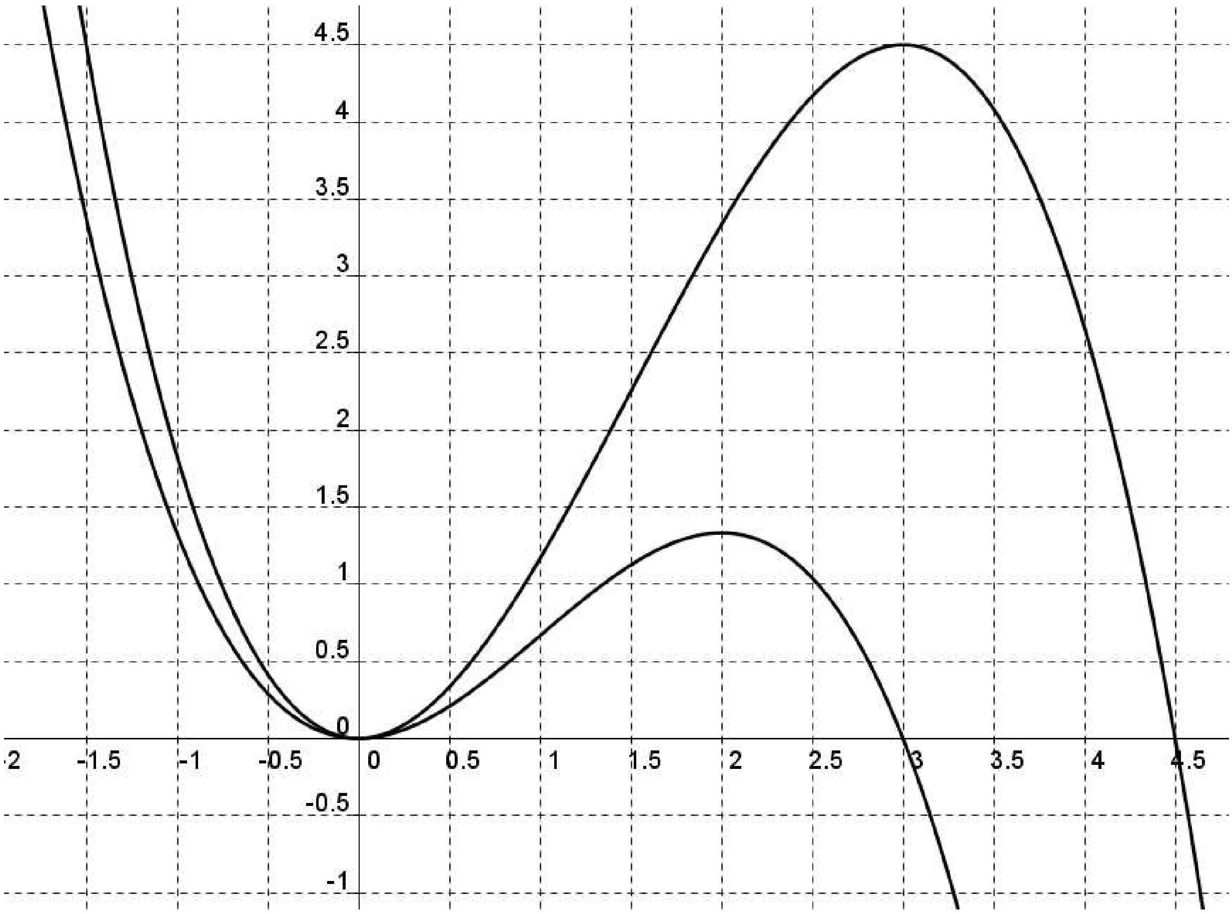
$$f_t'(x) \quad = \quad -x^2 + 2tx \quad = \quad x(-x + 2t) \quad = \quad 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 \quad = \quad 0 \quad und \quad x_2 \quad = \quad 2t$$

$$f_t''(x) \quad = \quad -2x + 2t$$

$$\Rightarrow \quad f_t''(0) \quad = \quad 2t > 0 \quad \Rightarrow \quad Min(0 \mid 0)$$

$$\Rightarrow \quad f_t''(2t) \quad = \quad -2t > 0 \quad \Rightarrow \quad Max\left(2t \;\middle|\; \frac{4}{3}t^3\right)$$

d) Für welche beiden Werte von **t** sind die Graphen hier dargestellt?
Mit Begründung!



Lösung: Aufgrund der 2. Nullstelle kann der Wert für **t** berechnet werden:

$$Nullstelle\ x_2: \quad 3t = 3 \quad \Rightarrow \quad t_1 = 1$$

$$Nullstelle\ x_2: \quad 3t = \frac{9}{2} \quad \Rightarrow \quad t_2 = \frac{3}{2}$$