Musterlösung **12. Jgst.** **1. Kursarbeit** **Datum: 09.10.2009**

Klasse: GY GS 09-08 **Fach: Mathematik (Grundfach)**

Thema: **Ganzrat. Funktionen mit Parameter; Produkt-, Quotienten- & Kettenregel**

1.) Ableitungen

Bilden Sie jeweils die erste Ableitung der gegebenen Funktionen und vereinfachen Sie die Ergebnisse so weit wie möglich und sinnvoll:

a) $f(x) = 2x^4 - x^2 + 3$

Lösung: $f'(x) = 8x^3 - 2x$

b) $f_t(x) = t^4x^2 - tx + 4t$

Lösung: $f_t'(x) = 2t^4x - t$

c) $f_x(t) = t^4x^2 - tx + 4t$

Lösung: $f_x'(t) = 4t^3x^2 - x + 4$

d) $f_t(x) = \sqrt{4x+t}$

Lösung: $f_t'(x) = \frac{4}{2\sqrt{4x+t}} = \frac{2}{\sqrt{4x+t}}$

e) $f(x) = \left(2x^2 - 1\right)\left(x - 3\right)$

Lösung: $f'(x) = 4x\left(x-3\right) + \left(2x^2-1\right)\cdot 1 = 6x^2 - 12x - 1$

f) $f_t(x) = \left(4x^2 + tx - 2\right)^5$

Lösung: $f_t'(x) = 5\left(4x^2 + tx - 2\right)^4 \cdot \left(8x + t\right)$

g) $f_t(x) = (tx-1)^4\left(x^2+t\right)^3$

Lösung:

$$f_t'(x) = 4t(tx-1)^3\left(x^2+t\right)^3+6x(tx-1)^4\left(x^2+t\right)^2$$

$$f_t'(x) = (tx-1)^3\left(x^2+t\right)^2\left[4t\left(x^2+t\right)+6x(tx-1)\right]$$

$$f_t'(x) = (tx-1)^3\left(x^2+t\right)^2\left(10tx^2+4t^2-6x\right)$$

2.) Theoretisches zu Ableitungen

a) Erklären Sie die Quotientenregel am Beispiel $f(x) = \dfrac{g(x)}{t(x)}$

Lösung: $f'(x) = \dfrac{g'(x)t(x)-g(x)t'(x)}{\left[t(x)\right]^2}$

b) Leiten Sie den Ausdruck $f(x) = \left(\dfrac{1}{2}x^2-3x\right)^3$

sowohl nach der Ketten- als auch nach der Produktregel ab und zeigen Sie, dass beide Ableitungen zum gleichen Ergebnis führen.

Lösung:

Ableitung nach der Kettenregel:

$$f'(x) = 3\left(\frac{1}{2}x^2-3x\right)^2(x-3)$$

Ableitung nach der Produktregel:

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}x^2-3x\right)\cdot\left(\frac{1}{2}x^2-3x\right)\cdot\left(\frac{1}{2}x^2-3x\right)$$

$$f'(x) = (x-3)\cdot\left(\frac{1}{2}x^2-3x\right)\cdot\left(\frac{1}{2}x^2-3x\right)+\left(\frac{1}{2}x^2-3x\right)\cdot(x-3)\cdot\left(\frac{1}{2}x^2-3x\right)$$
$$+\left(\frac{1}{2}x^2-3x\right)\cdot\left(\frac{1}{2}x^2-3x\right)\cdot(x-3)$$

$$f'(x) = (x-3)\cdot\left(\frac{1}{2}x^2-3x\right)^2+\left(\frac{1}{2}x^2-3x\right)^2\cdot(x-3)+\left(\frac{1}{2}x^2-3x\right)^2\cdot(x-3)$$

$$f'(x) = 3(x-3)\cdot\left(\frac{1}{2}x^2-3x\right)^2$$

c) Leiten Sie den Ausdruck $f(x) = \frac{x^2-1}{x}$ sowohl nach der Produkt-, Quotienten- als auch nach der Potenzregel ab zeigen Sie, dass alle Ableitungen zum gleichen Ergebnis führen.

Lösung:

Ableitung nach der Quotientenregel:

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x}$$

$$f'(x) = \frac{2x\cdot x-\left(x^2-1\right)\cdot 1}{x^2} = \frac{x^2+1}{x^2} = 1+\frac{1}{x^2}$$

Ableitung nach der Produktregel:

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x} \overset{\text{Zerlegung 2}}{=} \left(x^2-1\right)\cdot\frac{1}{x} = \left(x^2-1\right)\cdot x^{-1}$$

$$f'(x) = 2x\cdot x^{-1}+\left(x^2-1\right)\cdot\left(-x^{-2}\right) = 2-1+x^{-2} = 1+\frac{1}{x^2}$$

Ableitung nach der Potenzregel:

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x} \overset{\text{Zerlegung 1}}{=} \frac{x^2}{x}-\frac{1}{x} = x-x^{-1}$$

$$f'(x) = 1-\left(-x^{-2}\right) = 1+\frac{1}{x^2}$$

d) Begründen Sie die Korrektheit der Aussage:
Die Funktion $f(x)=g\left(x^2\right)$ ***hat die Ableitung*** $f'(x)=2x\cdot g'\left(x^2\right)$

Lösung: Anwendung der Kettenregel: äußere Funktion g(u(x)); innere Funktion x^2

e) Bilden Sie die 1. Ableitungen zu folgenden Funktionen:

(i) $f(x) = x^2\cdot g(x)$

Lösung: $f'(x) = 2x\cdot g(x)+x^2\cdot g'(x)$

(ii) $f(x) = g\left(nx^2-2x\right)$

Lösung: $f'(x) = g'\left(nx^2-2x\right)\cdot(2nx-2)$

(iii) $f(x) = g'(cx)\cdot g(cx)$

Lösung:

$$f'(x) = c\cdot g''(cx)\cdot g(cx)+c\cdot g'(cx)\cdot g'(cx)$$

$$f'(x) = c\cdot\left\{g''(cx)\cdot g(cx)+\left[g'(cx)\right]^2\right\}$$

3.) Ganzrationale Funktionen allgemein

a) Gegeben sei folgende Funktion:

$$f_{a,b}(x) = ax^4+bx^3 \quad mit \quad a,b\in\Re^+$$

Zeigen Sie, dass $f_{a,b}(x)$ immer genau zwei Wendestellen besitzt.

Lösung:

$$f_{a,b}'(x) = 4ax^3+3bx^2$$

$$f_{a,b}''(x) = 12ax^2+6bx = 0 \Rightarrow 6x(2ax+b) = 0 \Rightarrow x_1=0 \wedge x_2=-\frac{b}{2a}$$

$$f_{a,b}'''(x) = 24ax+6b$$

$$f_{a,b}'''(0) = 6b \underset{weg.Vor.}{\neq} 0 \Rightarrow \text{Wendepunkt 1 existiert}$$

$$f_{a,b}'''\left(-\frac{b}{2a}\right) = -6b \underset{weg.Vor.}{\neq} 0 \Rightarrow \text{Wendepunkt 2 existiert}$$

b) Bei einer differenzierbaren Funktion gelte:

$$f(x) \neq 0 \quad \forall x\in\Re \quad und \quad f'(x) = x\cdot f(x)$$

(i) Zeigen Sie, dass für die 2. und 3. Ableitung gilt:

$$f''(x) = \left(1+x^2\right)\cdot f(x) \quad und \quad f'''(x) = \left(3x+x^3\right)\cdot f(x)$$

Lösung:

$$f''(x) = 1\cdot f(x)+x\cdot f'(x) \overset{f'(x)\ =\ x\cdot f(x)}{=} 1\cdot f(x)+x\cdot x\cdot f(x)$$
$$f''(x) = 1\cdot f(x)+x^2\cdot f(x) = \left(1+x^2\right)\cdot f(x)$$

$$f'''(x) = 2x\cdot f(x)+\left(1+x^2\right)\cdot f'(x) \overset{f'(x)\ =\ x\cdot f(x)}{=} 2x\cdot f(x)+\left(1+x^2\right)\cdot x\cdot f(x)$$
$$f'''(x) = 2x\cdot f(x)+\left(x+x^3\right)\cdot f(x) = \left(3x+x^3\right)\cdot f(x)$$

(ii) Beweisen Sie, dass die Funktion genau einen Extremwert besitzt. Geben Sie auch die Stelle an.

Lösung:

$$f'(x) = x\cdot f(x) = 0 \overset{f(x)\ \neq\ 0}{\Rightarrow} x=0$$
$$f''(0) = (1+0)\cdot f(0) = 1\cdot f(0) \neq 0$$
$$\Rightarrow \quad \textit{Extremwert exisitert}$$

(iii) Begründen und beweisen Sie, dass die Funktion keine Wendestellen besitzt.

Lösung:

$$f''(x) = \left(1+x^2\right)\cdot f(x) = 0 \overset{f(x)\ \neq\ 0}{\Rightarrow} 1+x^2=0 \Rightarrow x^2=-1$$

nicht reell lösbar $\Rightarrow$ *Widerspruch: Wendepunkt existiert nicht*

4.) Ganzrationale Funktionen mit Parameter

Gegeben sei folgende Funktion:

$$f_k(x) = x^3-kx^2-2k^2x \quad mit \quad k\in\Re\setminus\{0\}$$

a) Bilden Sie die ersten drei Ableitungen der Funktion.

Lösung:

$$f_k'(x) = 3x^2-2kx-2k^2 \qquad f_k''(x) = 6x-2k \qquad f_k'''(x) = 6$$

b) Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion in Abhängigkeit von k und und begründen Sie, warum die Funktion immer drei Nullstellen besitzt.

Lösung:

$$f_k(x) = x\left(x^2 - kx - 2k^2\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x_{2/3} = \frac{k \pm \sqrt{k^2 + 8k^2}}{2} = \frac{1}{2}(k \pm 3k) \quad \Rightarrow \quad x_2 = 2k \quad \wedge \quad x_3 = -k$$

c) Ermitteln Sie das Maximum und das Minimum der Funktion für k = 1?

Lösung:

$$f_1(x) = x^3 - x^2 - 2x \quad ; \quad f_1'(x) = 3x^2 - 2x - 2 \quad ; \quad f_1''(x) = 6x - 2$$

$$f_1'(x) = 3x^2 - 2x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 24}}{6} = \frac{2 \pm 5,3}{6}$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = 1,22 \quad und \quad x_2 = -0,55$$

$$f_1''(1,22) = 6 \cdot 1,22 - 2 = 5,3 > 0 \quad \Rightarrow \quad Min(1,22 \mid -2,11)$$

$$f_1''(-0,55) = 6 \cdot (-0,55) - 2 = -5,3 < 0 \quad \Rightarrow \quad Max(-0,55 \mid 0,63)$$

d) Für **welchen Wert** von k hat der Graph der Funktion an der Stelle x = 1 die Steigung m = 3?

Lösung:

$$f_k'(1) = 3 - 2k - 2k^2 = 3 \quad \Rightarrow \quad 2k(1 + k) = 0 \quad \Rightarrow \quad k = -1$$

Die zweite Lösung k = 0 ist nicht relevant, wegen Voraussetzung für k.

e) Berechnen Sie den Wendepunkt in Abhängigkeit von k.

Lösung:

$$f_k'(x) = 3x^2 - 2kx - 2k^2 \qquad f_k''(x) = 6x - 2k \qquad f_k'''(x) = 6$$

$$\left.\begin{array}{l} f_k''(x) = 6x - 2k = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{3}k \\ f_k'''(x) = 6 \quad bzw. \quad f_k'''\left(\frac{1}{3}k\right) = 6 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad W\left(\frac{1}{3}k \;\middle|\; -\frac{20}{27}k^3\right)$$

f) Berechnen Sie die Tangente an die Funktion an der Stelle x = 1 für k = -1.

Lösung:

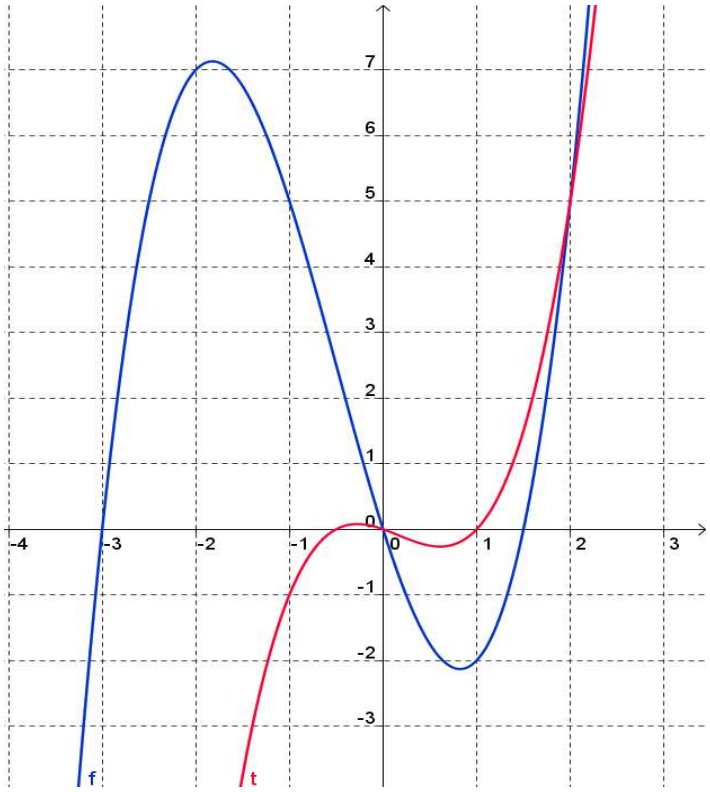
$$f_{(-1)}(1) = 1-(-1)\cdot 1-2(-1)^2\cdot 1 = 0$$

$$f_{(-1)}'(1) = 3-2\cdot(-1)\cdot 1-2\cdot(-1)^2 = 3 = m$$

Tangentengleichung ermitteln:

$$0 = 3\cdot 1+b \Rightarrow b = -3 \Rightarrow t(x) = 3x-3$$

g) Für welche beiden Werte von k ist der Graph hier dargestellt?



Lösung: Berechnung mittels Nullstellen:

$$\Rightarrow x_1 = 0 \wedge x_2 = 2k \wedge x_3 = -k$$

$$Graph\,1: \; t \qquad x_2 = 2k \Rightarrow 1 = 2k \Rightarrow k = \frac{1}{2}$$

$$Graph\,2: \; f \qquad x_2 = 2k \Rightarrow -3 = 2k \Rightarrow k = -\frac{3}{2}$$

h) Angenommen der Wendepunkt habe die Koordinaten: $W\left(\frac{1}{4}k \;\middle|\; -\frac{5}{256}k^3\right)$

Wie lautet dann die Ortskurve der Wendepunkte?

Lösung:

$$x=\frac{1}{4}k \quad \Rightarrow \quad 4x=k \quad \xrightarrow{in\ y=-\frac{4}{5}k^3} \quad y=-\frac{5}{256}\cdot(4x)^3=-\frac{5}{4}\cdot x^3$$