Musterlösung **12. Jgst.** **3. Kursarbeit** **Datum: 28.04.2010**

Klasse: GY GS 02-08 **Fach: Mathematik (Grundfach)**

Thema: Matrizen; Determinanten; LGS mit Cramer-Regel und Gauß-Verfahren

---

1.) Bildungsgesetze von Matrizen

Erstellen Sie eine 4x4-Matrix, für deren Elemente folgendes gilt:

$$a_{ij} = \begin{cases} j^2 & \text{für } i \le j \\ 2i - j & \text{sonst} \end{cases}$$

<u>**Lösung:**</u>

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 3 & 4 & 9 & 16 \\ 5 & 4 & 9 & 16 \\ 7 & 6 & 5 & 16 \end{pmatrix}$$

2.) Fragestellungen zu Matrizen

a) Die Hauptdiagonale einer quadratischen Matrix besteht aus 1.000 Elementen.

(i) Wie viele Elemente hat die Matrix?
(ii) Wie viele Elemente stehen oberhalb der Hauptdiagonalen?

<u>**Lösung:**</u> Die Matrix hat 1.000 * 1.000 = 1.000.000 Elemente.

Oberhalb der Hauptdiagonale stehen

$$\frac{1.000 \cdot 1.000 - 1.000}{2} = 499.500 \; Elemente$$

b) Definieren Sie den Begriff **Diagonalmatrix**.

<u>**Lösung:**</u> Unter einer Diagonalmatrix versteht man eine quadratische Matrix, deren Elemente außerhalb der Hauptdiagonalen alle den Wert 0 annehmen.

c) Erklären Sie, wann zwei Matrizen gleich sind.

<u>**Lösung:**</u> Zwei Matrizen sind gleich, wenn sie das gleiche Format besitzen und an den jeweils gleichen Positionen identische Werte haben.

d) Geben Sie die Werte der Koeffizienten a, b und c an, damit die beiden Matrizen gleich sind.

$$A=\begin{pmatrix} 2a & b+4 \\ 2-b & c^3 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 3-a & b^2-2b \\ 3 & c^2 \end{pmatrix}$$

Lösung: Werte der jeweiligen Positionen gleich setzen

$$2a = 3-a \rightarrow a = 1$$

$$2-b = 3 \rightarrow b = -1$$

$$\text{Probe:} \quad b+4 = b^2-2b \xrightarrow{b\ =\ -1} 3 = 3$$

$$c^3 = c^2 \rightarrow c_1 = 1 \vee c_2 = 0$$

3.) Rechnen mit Matrizen

Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke mit den gegebenen Matrizen:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$a)\ 3A^2-2B \qquad b)\ B^8$

$c)\ \left(A^T\cdot C\right)^T \qquad d)\ \left(2\cdot B^T+E\right)\cdot\left(A^2-4E\right)^T$

Lösung:

$$a)\ 3A^2-2B = \begin{pmatrix} 1 & 17 \\ -71 & 66 \end{pmatrix} \qquad b)\ B^8 = \begin{pmatrix} 10.233 & 5.474 \\ 10.948 & 7.496 \end{pmatrix}$$

$$c)\ \left(A^T\cdot C\right)^T = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 10 & -8 \end{pmatrix} \qquad d)\ \left(2\cdot B^T+E\right)\cdot\left(A^2-4E\right)^T = \begin{pmatrix} 47 & 81 \\ -5 & -66 \end{pmatrix}$$

e) Zeigen Sie anhand der Matrizen A und B, dass die erste binomische Formel bei der Matrizenrechnung nicht gilt.

Lösung:

$$\text{linke Seite}: \ (A+B)^2 = \left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}\right]^2 = \begin{pmatrix} 12 & 24 \\ 8 & 28 \end{pmatrix}$$

$$\text{rechte Seite}: \ A^2+2AB+B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}^2+2\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 22 & 17 \\ 17 & 18 \end{pmatrix}$$

f) Gegeben sei nun die Matrix

$$F = \begin{pmatrix} k & 0 & t \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} \quad mit\ k,t \in \Re$$

Berechnen Sie folgende Ausdrücke: $F^2, F^3\ und\ F^4$.

Ermitteln Sie aus Ihren Ergebnissen einen allgemeingültigen Ausdruck für F^n .

Lösung:

$$F^2 = \begin{pmatrix} k^2 & 0 & 2 \cdot k \cdot t \\ 0 & k^2 & 0 \\ 0 & 0 & k^2 \end{pmatrix} \qquad F^3 = \begin{pmatrix} k^3 & 0 & 3 \cdot k^2 \cdot t \\ 0 & k^3 & 0 \\ 0 & 0 & k^3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad F^4 = \begin{pmatrix} k^4 & 0 & 4 \cdot k^3 \cdot t \\ 0 & k^4 & 0 \\ 0 & 0 & k^4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad F^n = \begin{pmatrix} k^n & 0 & n \cdot k^{n-1} \cdot t \\ 0 & k^n & 0 \\ 0 & 0 & k^n \end{pmatrix}$$

g) In welchen Fällen kann das Matrizenprodukt ***A * B * C***
gebildet werden? Kreuzen Sie an. *Bei „Ja" => Format Ergebnis?*

Nr.	**Matrix A**	**Matrix B**	**Matrix C**	**Ja ?**	**Nein ?**	**Format**
1	(2,3)	(3,4)	(4,5)	X		(2,5)
2	(3,4)	(5,3)	(4,5)		X	
3	(2,4)	(4,3)	(3,3)	X		(2,3)
4	(3,5)	(5,2)	(2,3)	X		(3,3)
5	(4,3)	(4,4)	(3,5)		X	

Lösung: vgl. Tabelle

h) Berechnen Sie die Determinanten der Matrizen A, B und F.

Lösung:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 13 \qquad \det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -8$$

$$\det(F) = \begin{vmatrix} k & 0 & t \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{vmatrix} = k^3$$

4.) Lineare Gleichungssysteme

Bestimmen Sie die Lösung der folgenden linearen Gleichungssysteme:

a) $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\begin{array}{l|ccc|c} I.) & 1 & 1 & 0 & 6 \\ II.) & 1 & 0 & 1 & 8 \\ III.) & 1 & 1 & 1 & 12 \end{array} \xrightarrow[III.)-I.)]{II.)-I.)}$$

$$\begin{array}{l|ccc|c} I.) & 1 & 1 & 0 & 6 \\ II.) & 0 & -1 & 1 & 2 \\ III.) & 0 & 0 & 1 & 6 \end{array} \xrightarrow{II.)-III.)}$$

$$\begin{array}{l|ccc|c} I.) & 1 & 1 & 0 & 6 \\ II.) & 0 & -1 & 0 & -4 \\ III.) & 0 & 0 & 1 & 6 \end{array} \xrightarrow[(-1)\cdot II.)]{I.)+II.)}$$

$$\begin{array}{l|ccc|c} I.) & 1 & 0 & 0 & 2 \\ II.) & 0 & 1 & 0 & 4 \\ III.) & 0 & 0 & 1 & 6 \end{array} \Rightarrow \quad L = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

b) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & -5 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$

Lösung:

$$\begin{array}{llll|l} I.) & 3 & 2 & 1 & 12 \\ II.) & 4 & -5 & -1 & -4 \\ III.) & -2 & 1 & 3 & 4 \end{array} \xrightarrow[II.)+2\cdot III.)]{I.)+III.)}$$

$$\begin{array}{llll|l} I.) & 1 & 3 & 4 & 16 \\ II.) & 0 & -3 & 5 & 4 \\ III.) & -2 & 1 & 3 & 4 \end{array} \xrightarrow{III.)+2\cdot I.)}$$

$$\begin{array}{llll|l} I.) & 1 & 3 & 4 & 16 \\ II.) & 0 & -3 & 5 & 4 \\ III.) & 0 & 7 & 11 & 36 \end{array} \xrightarrow{III.)+2\cdot II.)}$$

$$\begin{array}{llll|l} I.) & 1 & 3 & 4 & 16 \\ II.) & 0 & -3 & 5 & 4 \\ III.) & 0 & 1 & 21 & 44 \end{array} \xrightarrow[II.)+3\cdot III.)]{I.)-3\cdot III.)}$$

$$\begin{array}{llll|l} I.) & 1 & 0 & -59 & -116 \\ II.) & 0 & 0 & 68 & 136 \\ III.) & 0 & 1 & 21 & 44 \end{array} \xrightarrow[III.)-\frac{21}{68}\cdot II.)]{\frac{1}{68}\cdot II.)}$$

$$\begin{array}{llll|l} I.) & 1 & 0 & -59 & -116 \\ II.) & 0 & 0 & 1 & 2 \\ III.) & 0 & 1 & 0 & 2 \end{array} \xrightarrow{I.)+59\cdot II.)}$$

$$\begin{array}{llll|l} I.) & 1 & 0 & 0 & 2 \\ II.) & 0 & 1 & 0 & 2 \\ III.) & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \Rightarrow \quad L = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

c) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2k \\ 4 & -3 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Lösung: per Cramer-Regel

$$x = \frac{D_x}{D} \Rightarrow x = \frac{36k+10}{34k} = \frac{18k+5}{17k}$$

$$y = \frac{D_y}{D} \Rightarrow y = \frac{31k-15}{34k}$$

$$z = \frac{D_z}{D} \Rightarrow z = \frac{17k-85}{34k} = \frac{k-5}{2k}$$

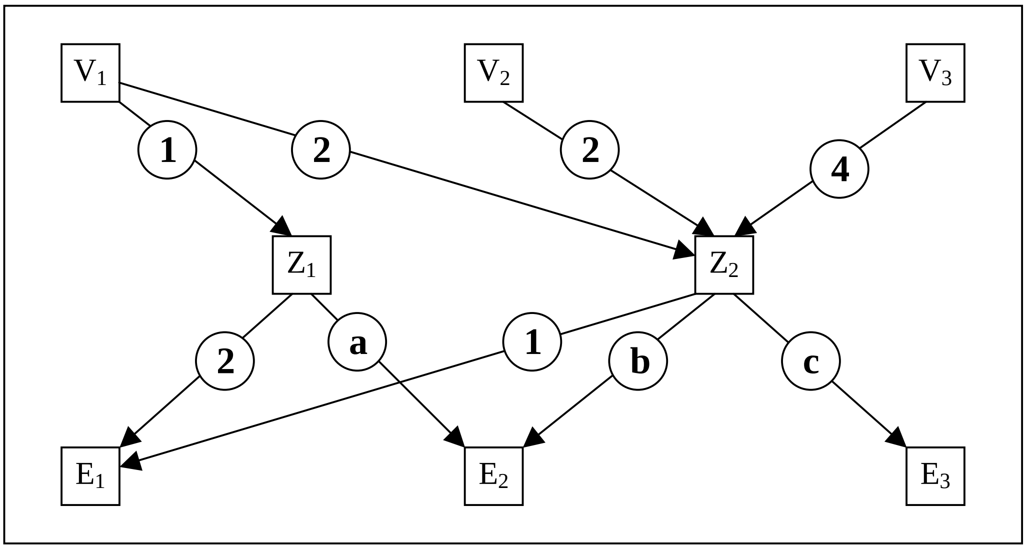
d) Für welchen Wert von k hat das LGS von Teilaufgabe c) keine Lösung? begründen Sie Ihre Entscheidung.

Lösung: Für k = 0 hätte das System keine Lösung, weil dann der Nenner den Wert 0 annehmen würde, während im Zähler von 0 verschiedene Werte entstehen.

5.) Materialberechnungen mit Matrizen

Ein Betrieb fertigt - wie im folgenden Diagramm dargestellt – aus drei Vorprodukten zwei Zwischenprodukte,

und den beiden Zwischenprodukten drei verschiedene Endprodukte.



Die nachfolgende Tabelle gibt jeweils die Gesamtzahl der einzelnen Vorprodukte an, die insgesamt für je ein Endprodukt benötigt werden:

$$M_{VE} = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 12 \\ 2 & 8 & 12 \\ 4 & 16 & 24 \end{pmatrix}$$

a) Ermitteln Sie die Matrizen M_{VZ} und M_{ZE} und berechnen Sie die entsprechenden Werte a, b und c.

Lösung:

$$M_{VZ} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad und \quad M_{ZE} = \begin{pmatrix} 2 & a & 0 \\ 1 & b & c \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ll|lll} M_{VZ} \cdot M_{ZE} & & 2 & a & 0 \\ & & 1 & b & c \\ \hline 1 & 2 & 4 & 9 & 12 \\ 0 & 2 & 2 & 8 & 12 \\ 0 & 4 & 4 & 16 & 24 \end{array}$$

$$\rightarrow \quad a+2b=9 \quad und \quad 2b=8 \quad und \quad 4b=16 \quad \rightarrow \quad b=4 \quad und \quad a=1$$

$$\rightarrow \quad 2c=12 \quad und \quad 4c=24 \quad \rightarrow \quad c=6$$

Sei nun die Matrix M_{VE} wie folgt festgelegt:

$$M_{VE} = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 10 \\ 2 & 8 & 10 \\ 4 & 16 & 24 \end{pmatrix}$$

b) Wie groß ist der Bedarf an Vorprodukten bei folgender Bestellung an Endprodukten: 10 ME E_1, 20 ME E_2 und 15 ME E_3?

Lösung:

$$\begin{pmatrix} 4 & 9 & 10 \\ 2 & 8 & 10 \\ 4 & 16 & 20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 370 \\ 330 \\ 720 \end{pmatrix}$$

c) Es liegt ein Lagerbestand von Vorprodukten in folgender Höhe vor:

V = (212 , 194 , 436)

Wie viele Endprodukte können daraus hergestellt werden?

<u>Lösung:</u>

$$\begin{pmatrix} 4 & 9 & 10 \\ 2 & 8 & 10 \\ 4 & 16 & 24 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 212 \\ 194 \\ 436 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Cramer-Regel}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}$$

oder per Gauß-Verfahren:

$$\begin{array}{llll|l} I.) & 4 & 9 & 10 & 212 \\ II.) & 2 & 8 & 10 & 194 \\ III.) & 4 & 16 & 24 & 436 \end{array} \xrightarrow[III.)-I.)]{II.) \leftrightarrow I.)}$$

$$\begin{array}{llll|l} I.) & 2 & 8 & 10 & 194 \\ II.) & 4 & 9 & 10 & 212 \\ III.) & 0 & 7 & 14 & 224 \end{array} \xrightarrow[II.)-2 \cdot I.)]{\frac{1}{2} \cdot I.)}$$

$$\begin{array}{llll|l} I.) & 1 & 4 & 5 & 97 \\ II.) & 0 & -7 & -10 & -176 \\ III.) & 0 & 7 & 14 & 224 \end{array} \xrightarrow[\frac{(-1)}{7} \cdot II.)]{III.)+II.)}$$

$$\begin{array}{llll|l} I.) & 1 & 4 & 5 & 97 \\ II.) & 0 & 1 & \frac{10}{7} & \frac{176}{7} \\ III.) & 0 & 0 & 4 & 48 \end{array} \xrightarrow[\frac{1}{4} \cdot III.)]{I.)-4 \cdot II.)}$$

$$\begin{array}{llll|l} I.) & 1 & 0 & -\frac{5}{7} & -\frac{25}{7} \\ II.) & 0 & 1 & \frac{10}{7} & \frac{176}{7} \\ III.) & 0 & 0 & 1 & 12 \end{array} \xrightarrow[II.)-\frac{10}{7} \cdot III.)]{I.)+\frac{5}{7} \cdot III.)}$$

$$\begin{array}{llll|l} I.) & 1 & 0 & 0 & 5 \\ II.) & 0 & 1 & 0 & 8 \\ III.) & 0 & 0 & 1 & 12 \end{array} \Rightarrow \quad L = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 12 \end{pmatrix}$$

d) Die Anzahl der einzelnen Endprodukte soll im Verhältnis 1 : 2 : 4 hergestellt werden.

Wie viele Endprodukte jeden Typs können hergestellt werden, wenn von Vorprodukten V_2 genau noch 1.160 Stück auf Lager sind.

Lösung:

$$\begin{pmatrix} 4 & 9 & 10 \\ 2 & 8 & 10 \\ 4 & 16 & 24 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ 4x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 1.160 \\ c \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 62x \\ 58x \\ 132x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 1.160 \\ c \end{pmatrix} \rightarrow x = 20$$

$$\rightarrow a = 1.240 \quad und \quad c = 2.640$$