Musterlösung **11. Jgst.** **6. Test** **Datum: 15.05.2009**

Klasse: GY GS 08 a/c **Fach: Mathematik (Kernfach)**

Thema: **Kurvenuntersuchung ganzrat. Funktionen**
(Nullstellen – Extrema – Wendepunkte)

1.) Monotonie

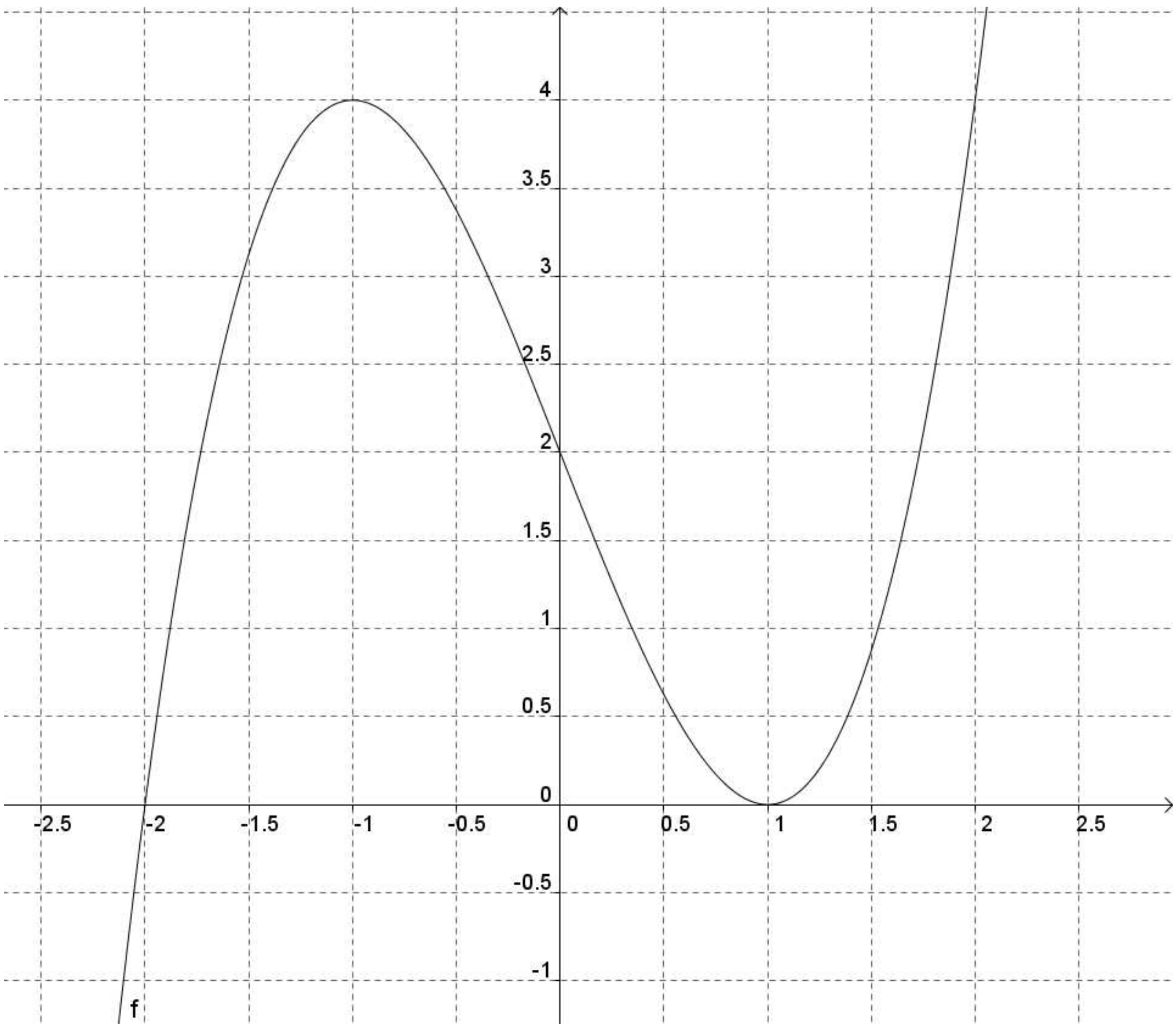
a) Welche Bedingung muss vorliegen, damit eine Funktion als monoton steigend bezeichnet wird?

Lösung: $f'(x) \geq 0 \quad für\ x \in I$

b) Was bedeutet „streng monoton steigend"?

Lösung: $f'(x) > 0 \quad für\ x \in I$; d.h. die Bedingung wird verschärft

c) Bestimmen Sie die Monotonieintervalle und das Monotonieverhalten des Graphen:



Lösung:

Intervall 1: $I_1 = \left]-\infty\,;-1\right[$ streng monoton steigend

Intervall 2: $I_2 = \left]-1\,;1\right[$ streng monoton fallend

Intervall 3: $I_3 = \left]1\,;\infty\right[$ streng monoton steigend

2.) Kurvenuntersuchung

Bestimmen Sie

(i) die Nullstellen, (ii) die Extremwerte (iii) und die Wendepunkte

bei folgenden Funktionen:

a) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{9}{8}$

Lösung:

(i)

$$Ansatz:\quad -\frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{9}{8} = 0$$

$$\Rightarrow \quad x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{9}{8}}}{2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + \frac{9}{4}}}{-1} = \frac{-2 \pm \sqrt{\frac{25}{4}}}{-1} = \frac{-2 \pm \frac{5}{2}}{-1}$$

$$x_1 = 4{,}5 \quad \wedge \quad x_2 = -\frac{1}{2}$$

(ii)

$$f'(x) = -x + 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$f''(x) = -1 \Rightarrow f''(2) = -1 < 0 \Rightarrow Max(2 \mid 3{,}125)$$

(iii) $f''(x) = -1 \neq 0 \Rightarrow keine\,Wendepunkte$

b) $f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^2$

<u>Lösung:</u>

$$Ansatz: \quad -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^2 = 0$$

(i)

$$x^2\left(-\frac{1}{6}x + \frac{1}{4}\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0\,(doppelt) \wedge x = \frac{3}{2}$$

(ii)

$$f'(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x(-x+1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \wedge x = 1$$

$$f''(x) = -x + \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow f''(0) = \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow Min(0 \mid 0)$$

$$\Rightarrow f''(2) = -\frac{1}{2} < 0 \Rightarrow Max\left(1 \,\middle|\, \frac{1}{12}\right)$$

(iii)

$$f''(x) = -x + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$f'''(x) = -1 \neq 0 \Rightarrow W\left(\frac{1}{2} \,\middle|\, \frac{1}{24}\right)$$

3.) Mathematisches Erklären und Begründen

a) Wie viele Extremwerte kann eine ganzrationale Funktion vom Grad n = 3 maximal haben?

<u>Lösung:</u> Die Funktion kann 2 Extremwerte haben, da die erste Ableitung einen Grad weniger besitzt als die Funktion.

b) Wie viele Extremwerte muss eine ganzrationale Funktion vom Grad n = 3 mindestens haben?

<u>Lösung:</u> Die Funktion muss keinen Extremwert besitzen: $f(x) = x^3$

c) Was ist ein Sattelpunkt?

Lösung: Ein Sattelpunkt ist ein Wendepunkt mit der Steigung m = 0.

d) Was ist die **notwendige** und was versteht man unter der **hinreichenden** Bedingung für einen Extremwert?

Lösung: notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

hinreichende Bedingung:

$$f'(x) = 0 \wedge f''(x) > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt}$$

$$f'(x) = 0 \wedge f''(x) < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt}$$

Anlage zu 2 b)