Musterlösung **11. Jgst.** **6. Test** **Datum: 16.06.2009**

Klasse: GY GS 08 b **Fach: Mathematik (Kernfach)**

Thema: Kurvenuntersuchung ganzrat. Funktionen

1.) Multiple Choice

a) Die Ableitung einer Funktion ist

- ☐ eine Gleichung?
- ☐ eine Zahl?
- ☒ eine Funktion?
- ☐ eine Zeichnung?

b) Die Ableitung einer Funktion in einem Punkt ist

- ☐ eine Gleichung?
- ☒ eine Zahl?
- ☐ eine Funktion?
- ☐ eine Zeichnung?

c) Die Ableitung hängt eng mit ***folgenden Begriffen*** zusammen:

- ☐ Stetigkeit
- ☒ Differenzierbarkeit
- ☒ Steigung
- ☐ Nullstelle der Funktion

d) Ist die Ableitung einer Funktion überall Null,
so ist die Funktion notwendigerweise

- ☐ eine Parabel.
- ☒ konstant.
- ☐ selbst auch Null.
- ☐ linear.

2.) Steigungen ermitteln

Welche Steigungen hat die Funktion $f(x) = \begin{cases} x^2 - x & \text{für } x < 1 \\ 4x^3 - 1 & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$

an den Stellen x = - 2 und x = 3 ?

Lösung:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{für } x < 1 \\ 12x^2 & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad f'(-2) = 2 \cdot (-2) - 1 = (-5) = m$$

$$\Rightarrow \quad f'(3) = 12 \cdot 3^2 = 108 = m$$

3.) Kurvendiskussion I

$$f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x \quad mit \quad x \in \Re$$

a) Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion $f(x)$.

Lösung:

$$Ansatz: \ -x^3 + 6x^2 - 9x = 0 \Rightarrow x\left(-x^2 + 6x - 9\right) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0 \quad und$$

$$x_{2/3} = \frac{(-6) \pm \sqrt{36 - 4 \cdot (-1) \cdot (-9)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{(-6) \pm 0}{-2} = 3[doppelt]$$

b) Berechnen Sie die ersten drei Ableitungen von $f(x)$.

Lösung:

$$f'(x) = -3x^2 + 12x - 9 \quad \wedge \quad f''(x) = -6x + 12 \quad \wedge \quad f'''(x) = -6$$

c) Ermitteln Sie Art und Lage der Extrempunkte von $f(x)$.

Lösung:

$$f'(x) = -3x^2 + 12x - 9 = 0$$

$$\Rightarrow x_{1/2} = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 4 \cdot (-3) \cdot (-9)}}{2 \cdot (-3)} = \frac{-12 \pm 6}{-6} \Rightarrow x_1 = 1 \quad \wedge \quad x = 3$$

$$f''(x) = -6x + 12$$

$$\Rightarrow f''(1) = 6 > 0 \Rightarrow Min(1 \mid -4) \quad und \quad f''(3) = -6 < 0 \Rightarrow Max(3 \mid 0)$$

d) Legen Sie die Monotonieintervalle fest.

Lösung:

Intervall 1:	$I_1 =]-\infty; 1[$	streng monoton fallend
Intervall 2:	$I_2 =]1; 3[$	streng monoton steigend
Intervall 3:	$I_3 =]3; \infty[$	streng monoton fallend

e) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an der Stelle x = 2.

Lösung:

$$f(2) = -2 \quad und \quad f'(2) = 3$$

$$\Rightarrow \quad -2 = 3\cdot 2+b \quad \Rightarrow \quad b = -2 \quad \Rightarrow \quad t(x) = 3x-8$$

f) Untersuchen Sie die Funktion $f(x)$ auf Wendepunkte.

Lösung:

$$f''(x) = -6x+12 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2$$

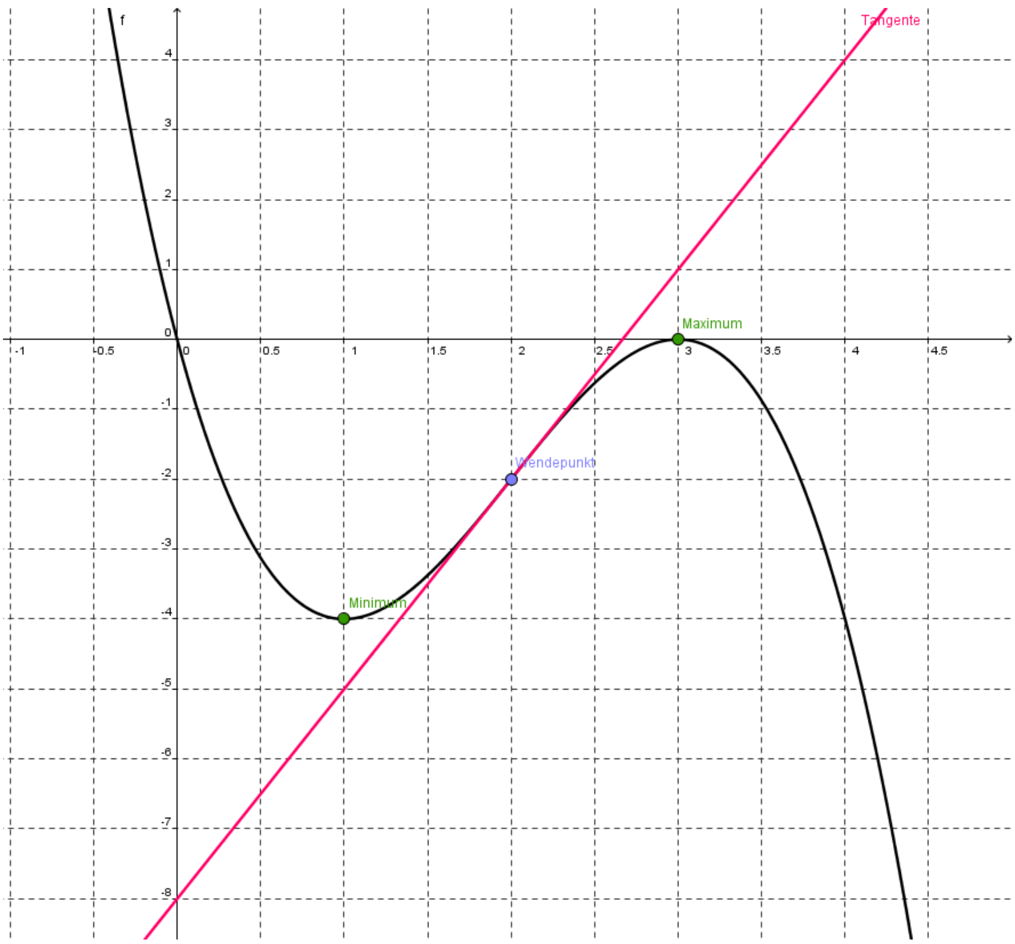
$$f'''(x) = -6 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad W(2\,|\,-2)$$

g) Beschreiben Sie das Verhalten der Funktion für $x \to \pm\infty$

Lösung:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left(-x^3+6x^2-9x\right) \to -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(-x^3+6x^2-9x\right) \to \infty$$



4.) Ableitungen mittels Potenzregel

Bilden Sie die erste Ableitung zu folgenden Funktionen:

a) $f_k(x) = 2x^k - x^{k-1}$

Lösung: $f_k'(x) = 2kx^{k-1} - (k-1)x^{k-2}$

b) $f(x) = (3x^2 - 2)^2$

Lösung:

$$f(x) = (3x^2 - 2)^2 = 9x^4 - 12x^2 + 4 \Rightarrow f'(x) = 36x^3 - 24x$$

c) $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x}{x^2}$

Lösung:

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x}{x^2} = \frac{x^3}{x^2} - \frac{2x}{x^2} = x - \frac{2}{x} = x - 2x^{-1}$$

$$\Rightarrow f'(x) = 1 - (-1) \cdot 2x^{-2} = 1 + \frac{2}{x^2}$$

d) $f(x) = \dfrac{2}{x^3}$

Lösung:

$$f(x) = \frac{2}{x^3} = 2x^{-3} \Rightarrow f'(x) = (-3) \cdot 2x^{-4} = -\frac{6}{x^4}$$