Musterlösung **11. Jgst.** **3. Test** **Datum: 15.01.2009**

Klasse: GY GS 08 a **Fach: Mathematik (Kernfach)**

Thema: Gleichungen bzw. ganzrat. Fkt. vom Grad n; Gebr.-rat. Funktionen

---

1.) Gleichungen

Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Gleichungen mit einem Verfahren Ihrer Wahl.

a) $x^3+6x^2 = 0$

Lösung:

$$x^2(x+6) = 0 \Rightarrow x^2=0 \wedge x+6=0 \Rightarrow x_1=0 \wedge x_2=-6$$

b) $\frac{1}{2}x^2+2x-1 = \frac{3}{2}$

Lösung:

$$\xrightarrow{-\frac{3}{2}} \frac{1}{2}x^2+2x-\frac{5}{2} = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-2\pm\sqrt{4-(-5)}}{1} = -2\pm\sqrt{9} = -2\pm 3$$

$$\Rightarrow x_1 = -5 \wedge x_2 = 1$$

c) $-x^2+10 = 2x^4$

Lösung:

$$-x^2+10 = 2x^4 \Rightarrow 2x^4+x^2-10 = 0 \xrightarrow[x^2=u]{Subst.} 2u^2+u-10 = 0$$

$$u_{1/2} = \frac{-1\pm\sqrt{1+80}}{4} = \frac{-1\pm 9}{4} \Rightarrow u_1 = 2 \wedge u_2 = -\frac{5}{2}$$

$$\xrightarrow[x^2=u]{\text{Resubst.}} x^2 = 2 \Rightarrow |x| = \sqrt{2}$$

und $x^2 = -\frac{5}{2} \Rightarrow$ Widerspruch (nicht lösbar)

d) $6x^3 - 3x^2 - 6x + 3 = 0$

Lösung:

$\xrightarrow{:3} \quad 2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$

$1.\,Lösung: \quad x = 1 \xrightarrow[oder\ Horner-Schema]{Polynomdivision} 2x^2 + x - 1 = 0$

$\Rightarrow \quad x_{2/3} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} \Rightarrow x_2 = -1 \wedge x_3 = \frac{1}{2}$

2.) Lösungsverhalten bei quadratischen Gleichungen

Für welche Werte von k hat die quadratische Gleichung

$$2x^2 - 4x + k = 1$$

(i) eine Lösung? (ii) zwei Lösungen?

Lösung: Diskriminante bestimmen

$\xrightarrow{-1} \quad 2x^2 - 4x + k - 1 = 0$

eine Lösung:

$D = 16 - 4 \cdot 2 \cdot (k-1) = 16 - 8k + 8 = 24 - 8k = 0 \Rightarrow k = 3$

zwei Lösungen:

$D = 24 - 8k > 0 \Rightarrow k < 3$

3.) Ganzrationale Funktionen I

Eine ganzrationale Funktion sei durch folgende Koeffizienten gegeben:

$a_5 = 4 \qquad a_3 = 2 \qquad a_4 = a_2 = a_1 = a_0 = 0$

Wie viele Nullstellen hat diese Funktion mindestens, wie viele höchstens? Begründen Sie kurz Ihre Antwort.

Lösung: Da eine Funktion 5. Grades vorliegt, hat die Funktion mindestens eine Nullstelle und maximal 5.
Hier ist in jedem Fall eine Nullstelle bei x = 0, da die Koeffizienten $a_2 = a_1 = a_0 = 0$ vorliegen.

4.) Ganzrationale Funktionen II

Geben Sie die Vorschrift einer ganzrationalen Funktion 4. Grades an, welche die angegebenen Nullstellen und keine weiteren besitzt:

$x_1 = x_2 = 0{,}5$ $\quad x_3 = -2$ $\quad x_4 = 1$

Lösung: $f(x) = (x-0{,}5)^2 (x+2)(x-1)$

5.) Gebrochen-rationale Funktionen

Bestimmen Sie das Verhalten der Funktion an der Unstetigkeitsstelle:

a) $f(x) = \dfrac{x-2}{x-4}$ $\quad für \quad x = 4$

von links: x	**3,9**	**3,99**	**3,999**	$x \to 4$
$f(x) = \dfrac{x-2}{x-4}$	**- 19**	**- 199**	**- 1.999**	$f(x) \to -\infty$

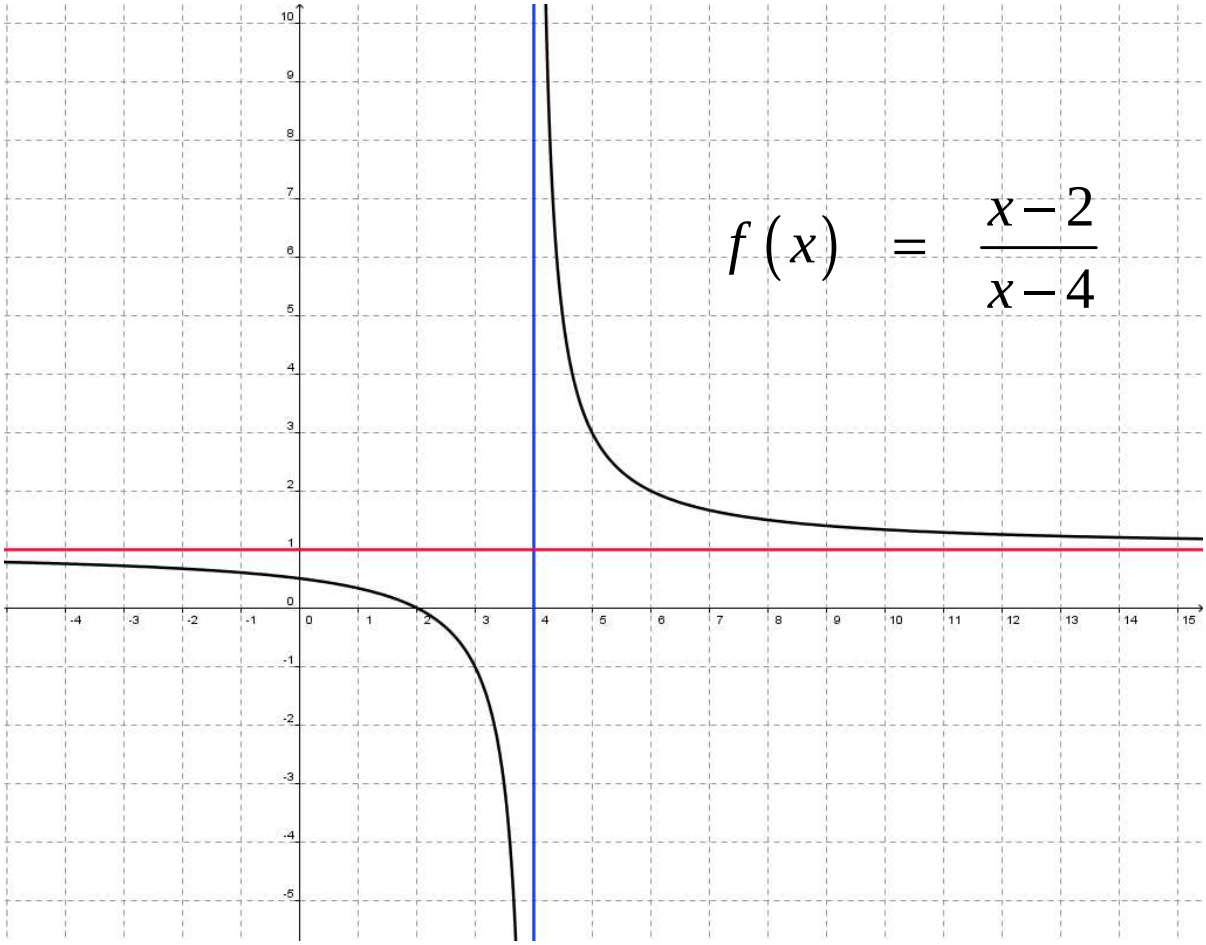
von rechts: x	**4,1**	**4,01**	**4,001**	$x \to 4$
$f(x) = \dfrac{x-2}{x-4}$	**21**	**201**	**2.001**	$f(x) \to \infty$

b) $g(x) = \dfrac{2x-4}{(x-2)^2}$ $\quad für \quad x = 2$

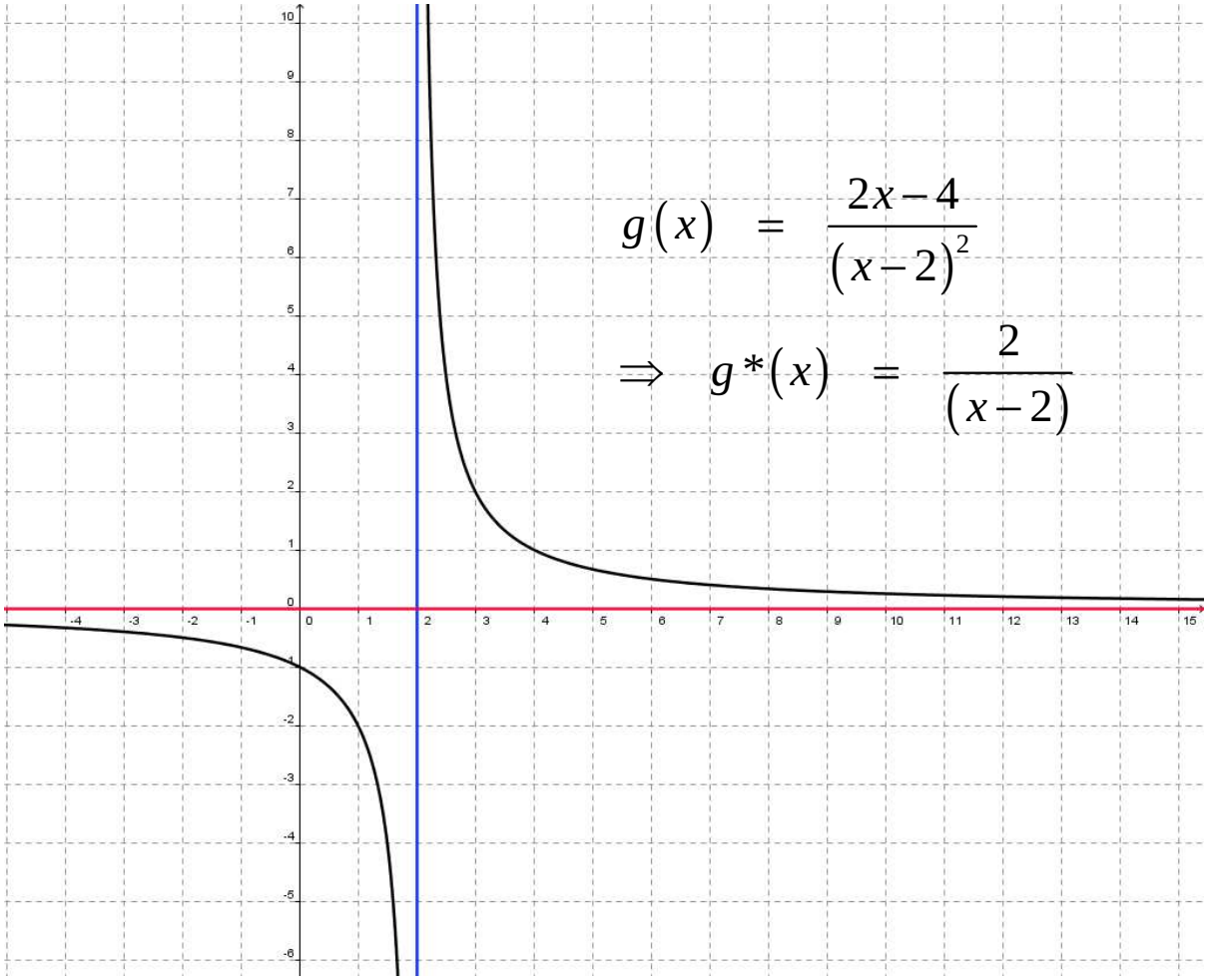
von links: x	**1,9**	**1,99**	**1,999**	$x \to 2$
$g(x) = \dfrac{2x-4}{(x-2)^2}$	**- 20**	**- 200**	**- 2.000**	$f(x) \to -\infty$

von rechts: x	**2,1**	**2,01**	**2,001**	$x \to 2$
$g(x) = \dfrac{2x-4}{(x-2)^2}$	**20**	**200**	**2.000**	$f(x) \to \infty$

Anmerkung zur Lösung: $g(x) = \dfrac{2x-4}{(x-2)^2} = \dfrac{2(x-2)}{(x-2)^2} \Rightarrow g^*(x) = \dfrac{2}{(x-2)}$



$$f(x) = \frac{x-2}{x-4}$$



$$g(x) = \frac{2x-4}{(x-2)^2}$$

$$\Rightarrow \quad g^*(x) = \frac{2}{(x-2)}$$