Musterlösung **11. Jgst.** **4. Kursarbeit** **Datum: 26.05.2009**

Klasse: GY GS 08 c **Fach: Mathematik (Kernfach)**

Thema: **Kurvenuntersuchung ganzrat. Funktionen**
Symmetrie - Nullstellen – Extrema – Wendepunkte

1.) Symmetrie

a) Definieren Sie den Begriff „Achsensymmetrie" in mathematisch korrekter Form.

Lösung: $f(-x) = f(x)$

b) Durch welche Eigenschaft kann man eine Achsensymmetrie bereits in der Funktionsvorschrift erkennen?

Lösung: Alle Exponenten sind gerade.

c) Welche Symmetrie liegt vor? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

(i) $f(x) = -4x^7 + 2x^5 + x$

Lösung: Punktsymmetrie, da alle Exponenten ungerade sind bzw. da gilt:

$$f(-x) = -f(x)$$

(ii) $f(x) = -2x^6 + x^2 - 4$

Lösung: Achsensymmetrie, da gilt: alle Exponenten sind gerade bzw.

$$f(-x) = f(x)$$

(iii) $f(x) = x^3\left(-0,5x^4 + 3x^2 + \frac{1}{x}\right)$

Lösung: $f(x) = x^3\left(-0,5x^4 + 3x^2 + x^{-1}\right) = -0,5x^7 + 3x^5 + x^2$

=> keine Symmetrie, da gilt:

$f(-x) \neq -f(x)$ *und* $f(-x) \neq f(x)$

(iv) $f(x) = -x^{3(n+1)} + 3x^{2n+1}$ *mit* $n \in N$

Lösung: $f(x) = -x^{8(n+1)} + 3x^{2n+1} = -x^{8n+8} + 3x^{2n+1}$

=> keine Symmetrie, da gilt:

$f(-x) \neq -f(x)$ *und* $f(-x) \neq f(x)$

2.) Kurvenuntersuchung

Bestimmen Sie

(i) die Nullstellen, (ii) die Monotonieintervalle,
(iii) die Extremwerte (iv) und die Wendepunkte

bei folgenden Funktionen:

a) $f(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2$

Lösung:

(i)

$$Ansatz: \quad f(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x^2\left(x^2 - 2x - 2\right) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0\,[doppelt] \quad und \quad x_{3/4} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}$$

(ii) + (iii)

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 4x = x(4x^2 - 6x - 4) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0 \quad und \quad x_{2/3} = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 64}}{2 \cdot 4} = \frac{6 \pm 10}{8}$$

$$\Rightarrow x_2 = 2 \quad \wedge \quad x_3 = -\frac{1}{2}$$

$$f''(x) = 12x^2 - 12x - 4$$

$$\Rightarrow f''(0) = -4 < 0 \Rightarrow Max(0 \mid 0)$$

$$\Rightarrow f''(2) = 20 > 0 \Rightarrow Min(2 \mid -8)$$

$$\Rightarrow f''\left(-\frac{1}{2}\right) = 5 > 0 \Rightarrow Min\left(-\frac{1}{2} \,\middle|\, -\frac{3}{16}\right)$$

Monotonieintervalle:

$I_1 = \left]-\infty; -\frac{1}{2}\right[$ streng monoton fallend

$I_2 = \left]-\frac{1}{2}; 0\right[$ streng monoton steigend

$I_3 =]0; 2[$ streng monoton fallend

$I_4 =]2; \infty[$ streng monoton steigend

(iv)

$$f''(x) = 12x^2 - 12x - 4 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \frac{12 \pm \sqrt{144+192}}{24} = \frac{12 \pm 18,33}{24}$$

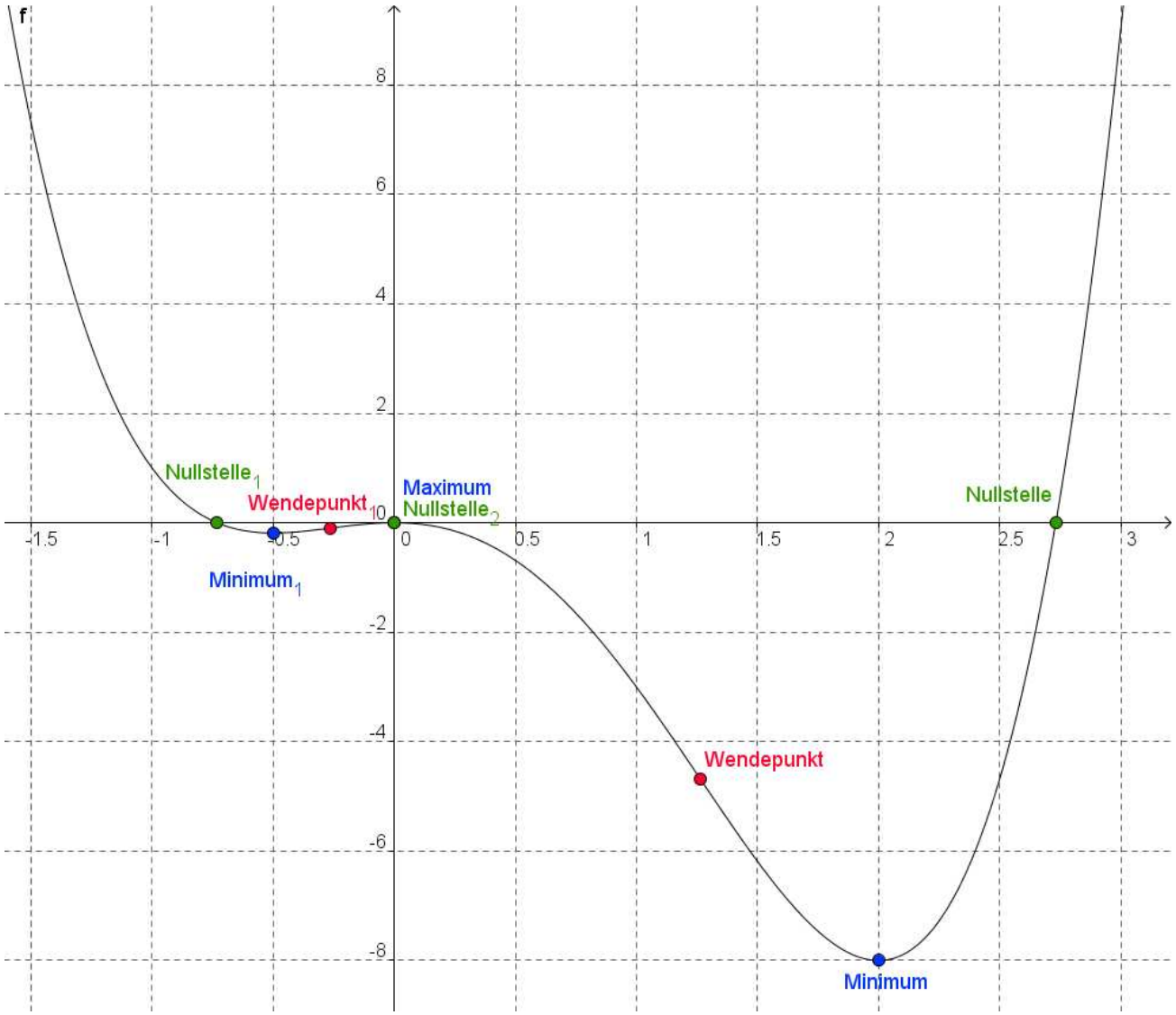
$$\Rightarrow x_1 = 1,26 \quad und \quad x_2 = -0,26$$

$$f'''(x) = 24x - 12$$

$$f'''(1,26) \neq 0 \Rightarrow W_1(1,26 \mid -4,68)$$

$$und \quad f'''(-0,26) \neq 0 \Rightarrow W_2(-0,26 \mid -0,1)$$

Graph der Funktion:



b) $f(x) = -\frac{1}{2}x^4 + x^2 + \frac{3}{2}$

Lösung:

(i)

$$Ansatz: \quad f(x) = -\frac{1}{2}x^4 + x^2 + \frac{3}{2} = 0 \xrightarrow{Subst.} -\frac{1}{2}u^2 + u + \frac{3}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad u_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+3}}{-1} = -1 \pm 2 \quad \Rightarrow \quad u_1 = -1 \quad und \quad u_2 = 3$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = \sqrt{3} \quad und \quad x_2 = -\sqrt{3}$$

(ii) + (iii)

$$f'(x) = -2x^3 + 2x = -2x(x^2 - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = 0 \quad und \quad x_{2/3} = \pm 1$$

$$f''(x) = -6x^2 + 2$$

$$\Rightarrow \quad f''(0) = 2 > 0 \quad \Rightarrow \quad Min\left(0 \mid \frac{3}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad f''(\pm 1) = -4 < 0 \quad \Rightarrow \quad Max(\pm 1 \mid 2)$$

Monotonieintervalle:

$I_1 =]-\infty; -1[$ streng monoton steigend

$I_2 =]-1; 0[$ streng monoton fallend

$I_3 =]0; 1[$ streng monoton steigend

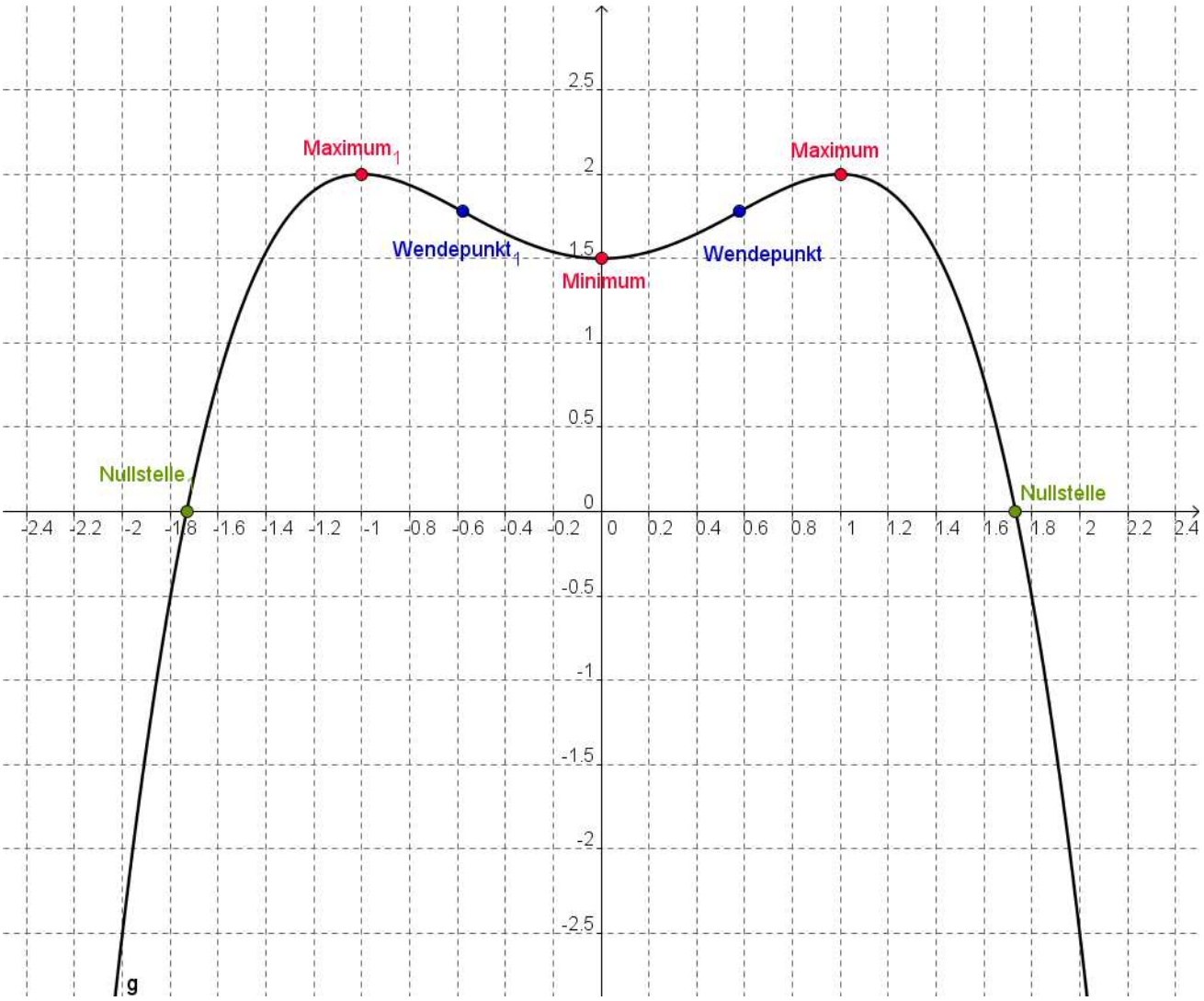
$I_4 =]1; \infty[$ streng monoton fallend

(iv)

$$f''(x) = -6x^2 + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1/2} = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} = \pm\frac{1}{3}\sqrt{3}$$

$$f'''(x) = -12x \quad \Rightarrow \quad f'''\left(\pm\frac{1}{3}\sqrt{3}\right) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad W_{1/2}\left(\pm\frac{1}{3}\sqrt{3} \mid 1{,}78\right)$$

Graph der Funktion:



3.) Steigungen und Tangente(n)

Gegeben sei folgende Funktion: $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2$

a) Berechnen Sie die Tangente in x = 2 an die Funktion

Lösung:

$$f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2 \xrightarrow{x=2} f(2) = \frac{8}{6} - 2 + 2 = \frac{4}{3}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - x \xrightarrow{x=2} f'(2) = 2 - 2 = 0 = m$$

$$\xrightarrow{t(x) = mx+b} \frac{4}{3} = 0 \cdot 2 + b \Rightarrow \frac{4}{3} = b$$

$$Tangente: \quad t(x) = \frac{4}{3}$$

b) An welchen Stellen hat die Funktion eine Tangente mit folgender Gleichung: $t(x) = 4x+b \quad mit \quad b \in \Re$

Lösung:

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - x = 4 \xrightarrow{-4} \frac{1}{2}x^2 - x - 4 = 0$$

$$\Rightarrow x_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{1} = 1 \pm 3 \Rightarrow x_1 = 4 \quad und \quad x_2 = -2$$

4.) Wendepunkte bestimmen

a) Wie lautet die notwendige Bedingung für einen Wendepunkt?

Lösung: notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$

b) Nennen Sie die hinreichende Bedingung für einen Wendepunkt?

Lösung: hinreichende Bedingung: $f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0$

c) Was versteht man unter einem Sattelpunkt?

Lösung: Ein Sattelpunkt ist ein Wendepunkt mit der Steigung m = 0.

d) Gegeben sei die Funktion $f_k(x) = -4x^2 + 6kx - 3$

Zeigen Sie, dass diese Funktion keinen Wendepunkt besitzt.

Lösung:

$$f_k(x) = -4x^2 + 6kx - 3 \Rightarrow f_k'(x) = -8x + 6k$$

$$\Rightarrow f_k''(x) = -8 \neq 0 \Rightarrow keine\ Wendepunkte$$

5.) Kurvenuntersuchungen machen Sinn

Jürgen M hat umgesattelt und ein Programmkino erworben. Es hat eine Gesamtkapazität von 200 Sitzplätzen. In den Wintermonaten richten sich die Heizkosten h während einer Filmvorführung nach der Auslastung x (= Besucherzahl pro Vorstellung) und können durch folgende Funktion beschrieben werden:

$$h(x) \quad = \quad 60 - \frac{1}{1.000} x^2$$

a) Wie lautet der hier sinnvolle Definitionsbereich?

Lösung: $D \quad = \quad [0\,;\,200]$

b) Welche Kosten entstehen bei 150 Besuchern?

Lösung: $h(150) \quad = \quad 60 - \frac{1}{1.000} \cdot 150^2 \quad = \quad 60 - 22,5 \quad = \quad 37,5\,[€]$

c) Für welche Besucheranzahl sind die Heizkosten am größten und wie hoch wären sie dann?

Anmerkung: Wird dann überhaupt eine Filmvorführung stattfinden ;-))

Lösung:

$$h'(x) \quad = \quad -\frac{1}{500} x \quad = \quad 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

$$h''(x) \quad = \quad -\frac{1}{500} < 0 \quad \Rightarrow \quad Max(0 \mid 60) \quad \Rightarrow \quad Scheitelpunkt$$

$$h(0) \quad = \quad 60 - \frac{1}{1.000} \cdot 0^2 \quad = \quad 60,00\,[€]$$

d) Für welche Besucheranzahl sind die Heizkosten minimal?

Berechnen Sie auch hier die Heizkostenhöhe und zeigen Sie, dass Ihre Lösung ein Minimum darstellt.

Lösung:

$$h'(x) \quad = \quad -\frac{1}{500} x \quad \xrightarrow{x>0} \quad streng\ monoton\ fallend$$

$$\Rightarrow \quad h(200) \quad = \quad 60 - \frac{1}{1.000} \cdot 200^2 \quad = \quad 60 - 40 \quad = \quad 20,00\,[€]$$

[= minimale Kosten]

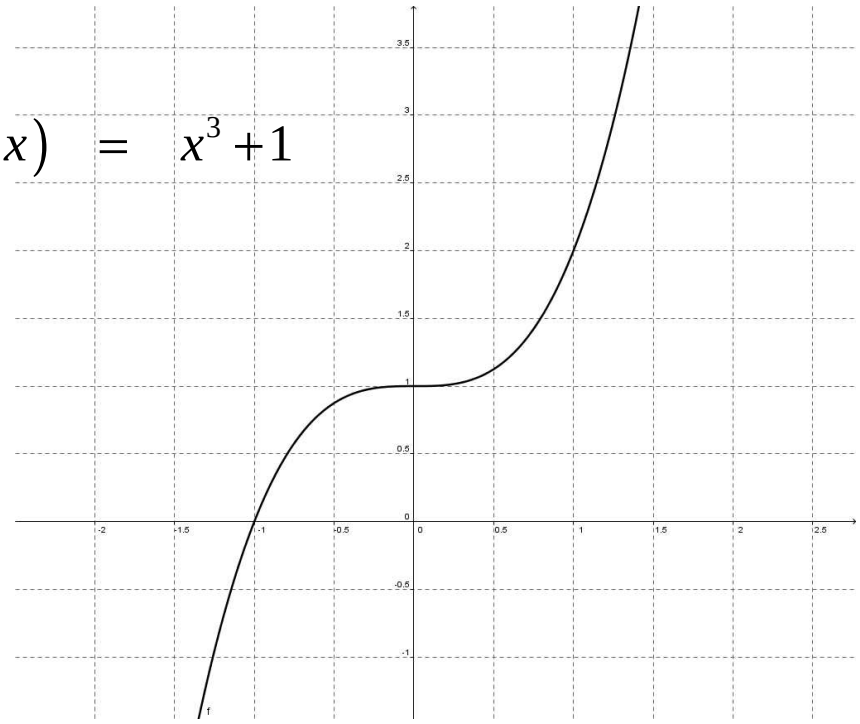
6.) Gibt es solche Funktionen?

Versuchen Sie den jeweiligen Graphen einer Funktion ***f(x)*** mit dem Definitionsbereich $D = \Re$ zu **<u>zeichnen</u>**, die folgende Eigenschaften hat.

Sollte der Graph nicht existieren, so begründen Sie weshalb.

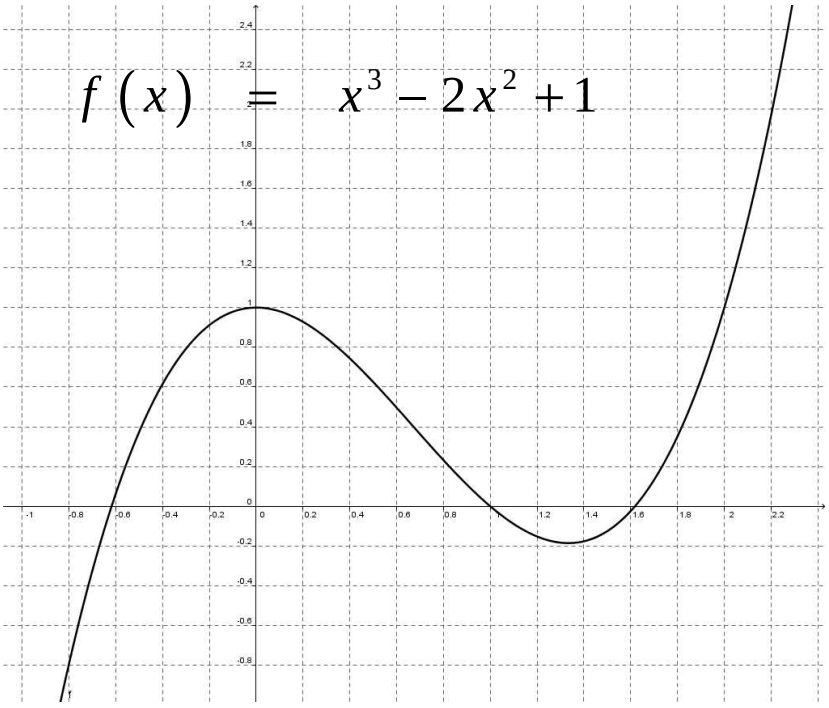
a) ***f(x)*** hat genau einen Wendepunkt und keinen relativen Extrempunkt.

$$f(x) = x^3 + 1$$



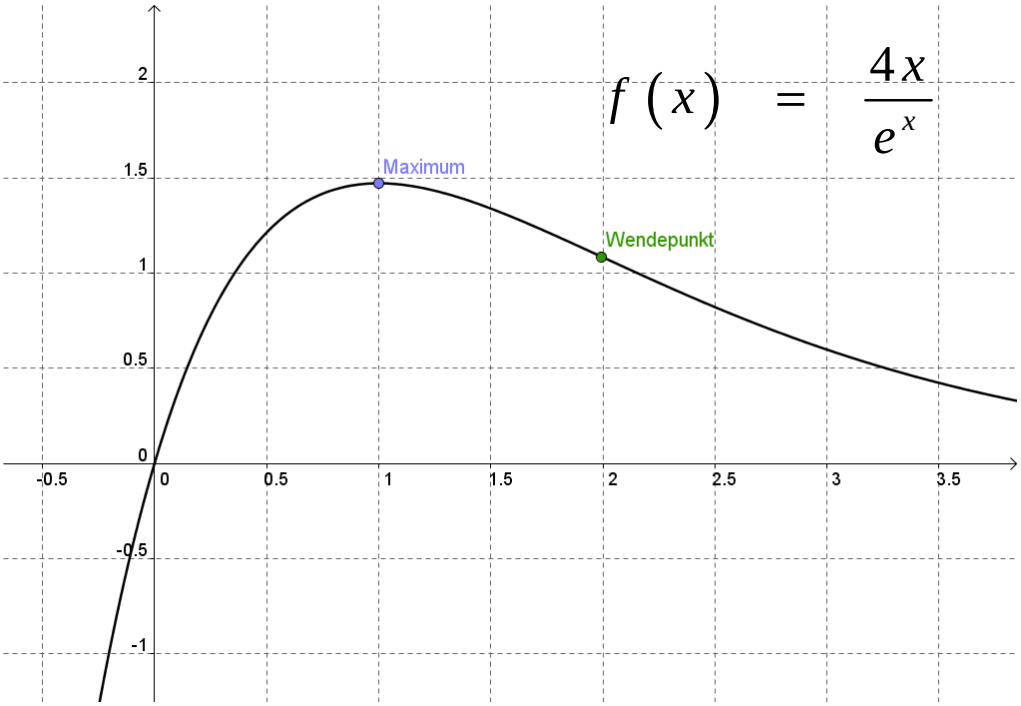
b) ***f(x)*** hat genau einen Wendepunkt, genau einen relativen Hochpunkt und genau einen relativen Tiefpunkt.

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$$

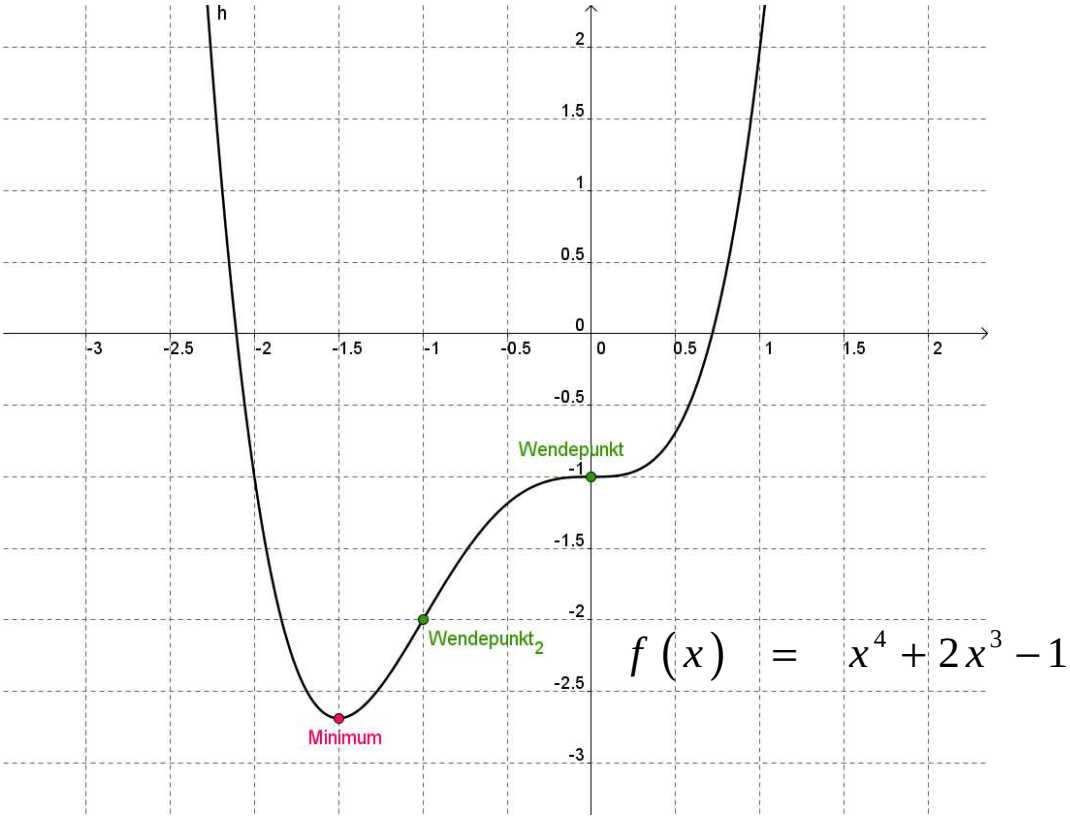


c) ***f(x)*** hat genau einen Wendepunkt, genau einen relativen Hochpunkt und keinen relativen Tiefpunkt.

Lösung: Keine Funktionsvorschrift dieser Art oder Funktionsgraph möglich, wenn man ganzrationale Funktionen als Grundlage heranzieht.



d) ***f(x)*** hat genau einen relativen Tiefpunkt, keinen relativen Hochpunkt und zwei Wendepunkte.



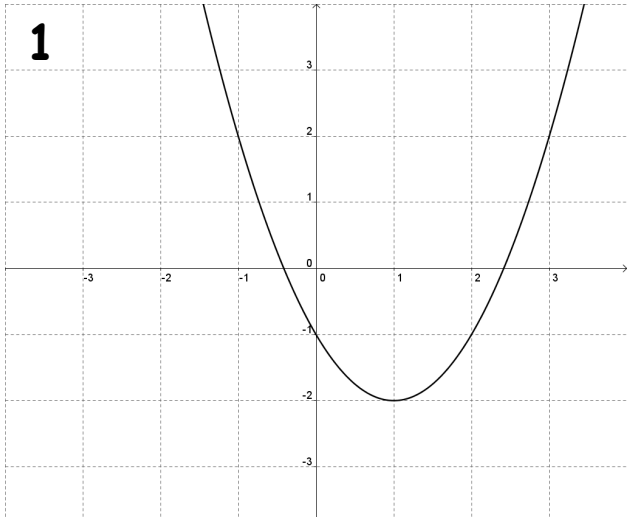
7.) Zuordnung: Funktion - Graph

Ordnen Sie drei der Funktionen die Ableitungsgraphen zu und begründen Sie kurz Ihre Entscheidung durch zwei Kennzeichen.

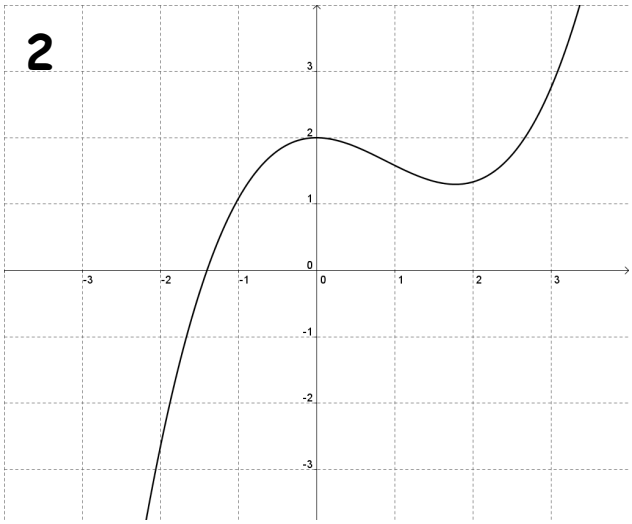
Für eine Funktion ist leider kein Ableitungsgraph vorhanden – den müssen Sie leider selbst zeichnen.

Funktionen

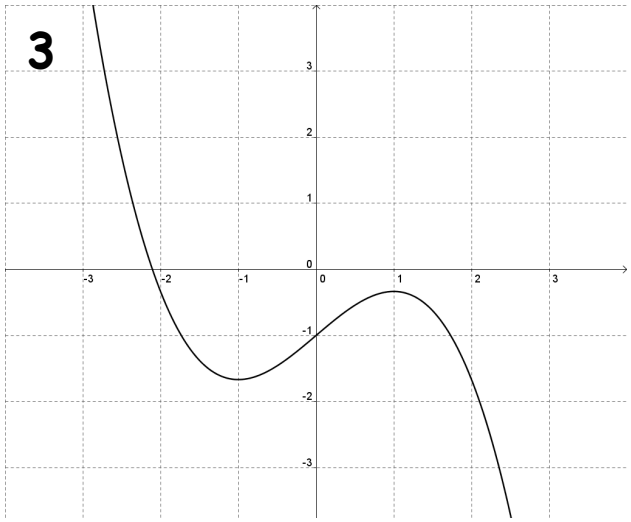
1



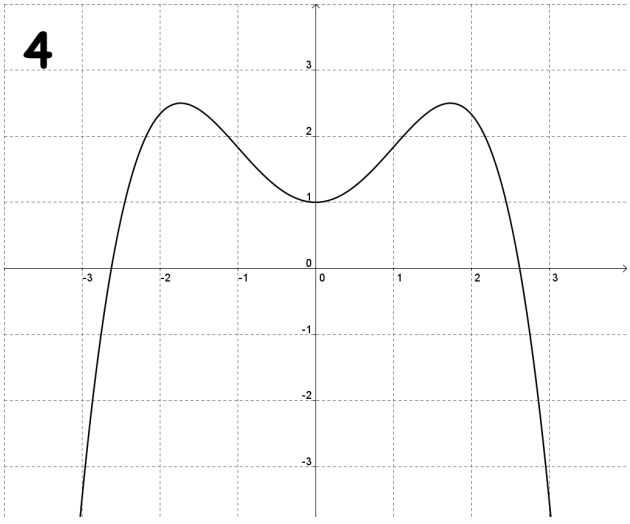
2



3

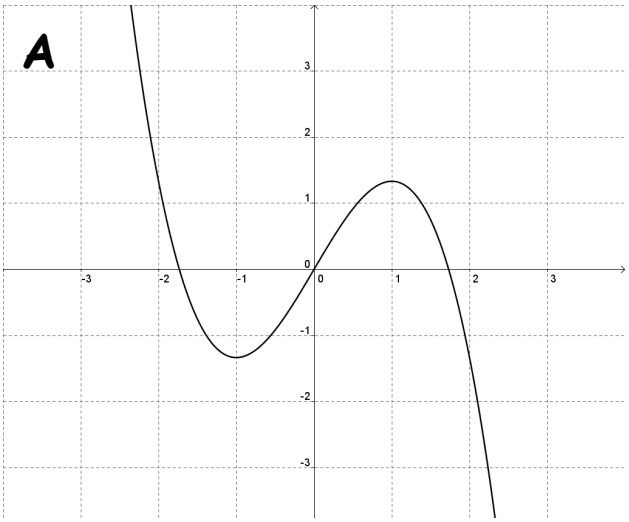


4

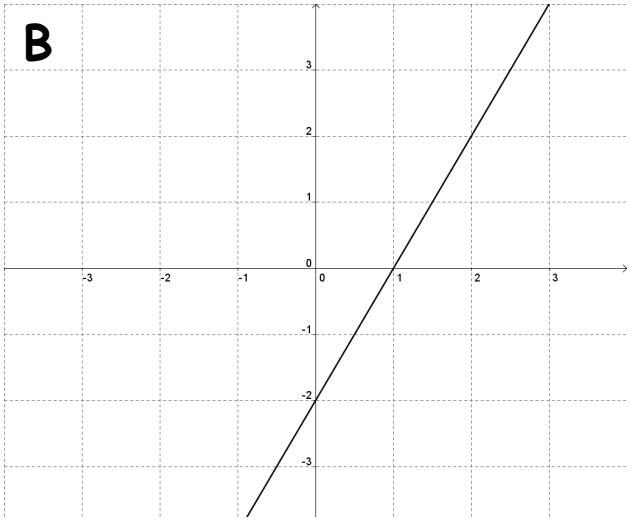


Ableitungen

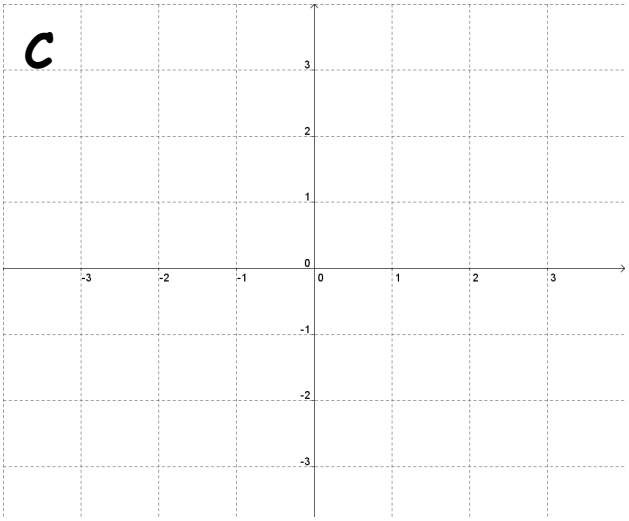
A



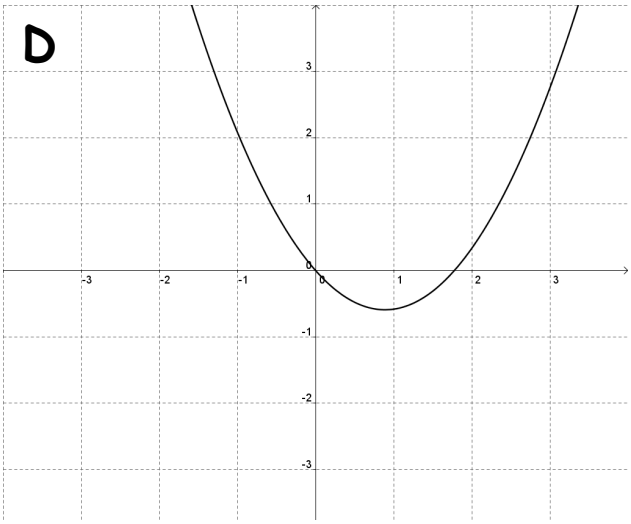
B



C



D



Lösung: Zuordnungen:

1 => B

quadratische Funktion => lineare Ableitungsfunktion
Tiefpunkt bei x = 1 => Nullstelle bei x = 1

2 => D

Funktion vom Grad n = 3 => quadratische Ableitungsfunktion
Hochpunkt bei x = 0 => Nullstelle bei x = 0
Tiefpunkt bei x = 2 => Nullstelle bei x = 2

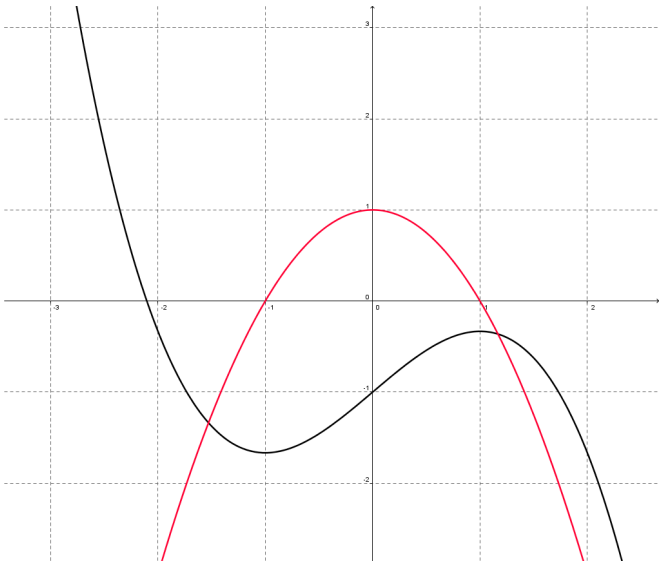
4 => A

Funktion vom Grad n = 4 => Ableitungsfunktion vom Grad n = 3
Hochpunkte bei x = ± 2 => Nullstelle bei x = ± 2
Tiefpunkt bei x = 0 => Nullstelle bei x = 0

Ableitungsgraph zu 3

Funktion vom Grad n = 3 => quadratische Ableitungsfunktion
Hochpunkt bei x = 1 => Nullstelle bei x = 1
Tiefpunkt bei x = - 1 => Nullstelle bei x = - 1

Streng monoton fallend bis x = - 1:
=> Ableitungsgraph verläuft unterhalb der x-Achse

Streng monoton steigend bis x = 1:
=> Ableitungsgraph verläuft oberhalb der x-Achse

Streng monoton fallend ab x = 1:
=> Ableitungsgraph verläuft unterhalb der x-Achse