Musterlösung **11. Jgst.** **3. Kursarbeit** **Datum: 09.03.2009**

Klasse: GY GS 08 c **Fach: Mathematik (Kernfach)**

Thema: Gebrochen-rationale Funktionen; Stetigkeit

1.) Gebrochen-rationale Funktionen I

Untersuchen Sie die drei folgenden Funktionen hinsichtlich folgender Eigenschaften:

Nullstellen, Polstellen, Lücken, Asymptote und S_y

a) $g(x)=\dfrac{x-2}{2x^2-8}$

Lösung:

$$Zähler: \quad x-2=0 \quad \Rightarrow \quad x=2 \quad [Lücke]$$

$$Nenner: \quad 2x^2-8=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=-2 \quad [Pol\ mit\ VZW] \quad und \quad x_2=2 \quad [Lücke]$$

$$Lücke: \quad x=2$$

$$Asymptote: Zählergrad < Nennergrad \quad \Rightarrow \quad a(x)=0$$

$$S_y(0 \mid 0,25)$$

b) $f(x) = \dfrac{2x-4}{(x-1)(x+4)}$

Lösung:

$$Zähler: \quad 2x-4=0 \quad \Rightarrow \quad x=2 \quad [Nullstelle]$$

$$Nenner: \quad (x-1)(x+4)=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=1 \quad und \quad x_2=-4 \quad [Pole\ mit\ VZW]$$

$$keine\ Lücke$$

$$Asymptote: Zählergrad < Nennergrad \quad \Rightarrow \quad a(x)=0$$

$$S_y(0 \mid 1)$$

c) $f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{(x-1)^2}$

Lösung:

$$Zähler: \quad x^2 - x - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -2 \quad und \quad x_2 = 3 \quad [Nullstellen]$$

$$Nenner: \quad (x-1)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad |x| = 1 \quad [Pol\ ohne\ VZW]$$

$$keine\ Lücke$$

$$Asymptote: Zählergrad = Nennergrad \quad \Rightarrow \quad a(x) = 1$$

$$S_y(0 \mid -6)$$

2.) Gebrochen-rationale Funktionen mit Parameter

Gegeben ist die Funktion $f_t(x) = \frac{x^2}{x^2 - 2tx + 3t} \quad mit \ \ t \in \Re \setminus \{0\}$

Für welchen Wert von **t** besitzt die Funktion

(i) keine Polstelle?

(ii) eine Polstelle?

(iii) zwei Polstellen?

Lösung: Diskriminante berechnen:

$$D = b^2 - 4ac \quad \Rightarrow \quad D = 4t^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3t = 4t^2 - 12t$$

$$\text{Fall I} \;=>\; \text{eine Lösung}: \quad 4t^2 - 12t = 0 \quad \Rightarrow \quad 4t(t-3) = 0$$

$$\Rightarrow \quad 4t = 0 \quad und \quad t - 3 = 0$$

$$\Rightarrow \quad t = 0\,[nicht\ definiert!] \quad und \quad t = 3$$

$$\text{Fall II} \;=>\; \text{zwei Lösungen}: \quad t \in \Re \setminus [0\,;3]$$

$$\text{Fall III} \;=>\; \text{keine Lösung}: \quad t \in \;]0\,;3[$$

3.) Gebrochen-rationale Funktionen II

Geben Sie je eine gebrochen-rationale Funktionsvorschrift an, deren Graph folgende Eigenschaften besitzt:

a) Pol an der Stelle x = 2 und eine Asymptote mit a(x) = -1.

Lösung: $f(x) = \frac{-x}{x-2}$

b) Pol an der Stelle x = -1 und eine einfache Nullstelle bei x = 4.

Lösung: $f(x) = \frac{x-4}{x+1}$

c) Pol an der Stelle x = - 2, behebbare Lücke bei x = 1, eine doppelte Nullstelle bei x = 2, Asymptote a(x) = 1,5
Zählergrad: n = 4

Lösung: $f(x) = \frac{3(x-1)^2(x-2)^2}{2(x+2)^3(x-1)}$

4.) Stetigkeit

Untersuchen Sie die Funktion $f(x)$ auf Stetigkeit und begründen Sie Ihre Entscheidung:

$$f_k(x) = \begin{cases} x^2 - k^2 x & x < 3 \\ \frac{2}{3}x + 4k & x \geq 3 \end{cases}$$

Lösung:

$$\lim_{h \to 0^-} (3-h)^2 - k^2(3-h) = \lim_{h \to 0^+} \frac{2}{3}(3+h) + 4k \Rightarrow 9 - 3k^2 = 2 + 4k$$

$$\Rightarrow -3k^2 - 4k + 7 = 0 \Rightarrow k_{1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{16+84}}{-6} = \frac{4 \pm 10}{-6}$$

$$\Rightarrow k_1 = 1 \quad und \quad k_2 = -\frac{7}{3}$$

5.) Schnittpunkt: Gerade mit gebrochen-rationaler Funktion

Gegeben seien die Funktion $f\left(x\right)=\dfrac{x-3}{x+1}$

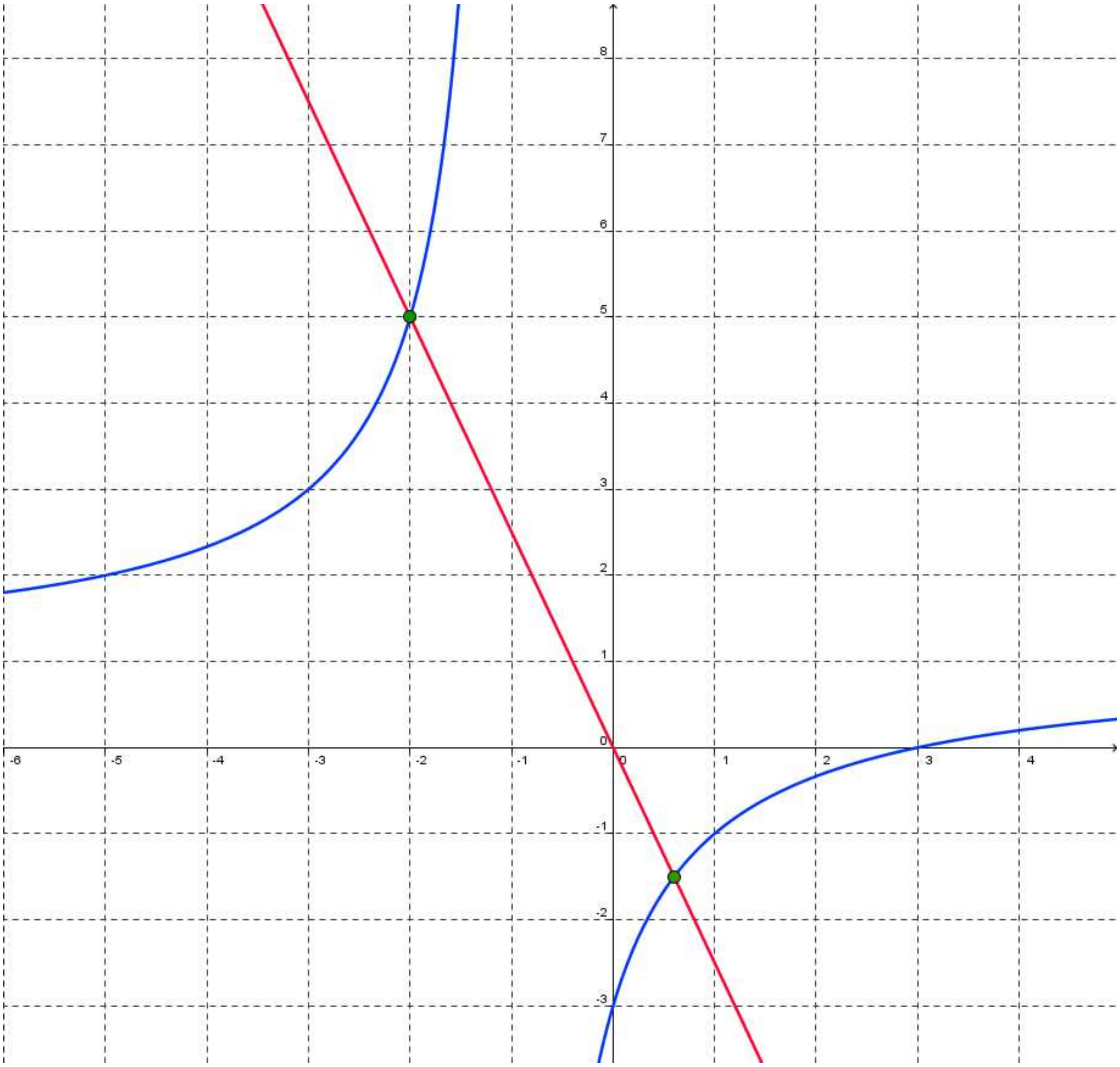
und eine Ursprungsgerade verläuft durch den Punkt $P\left(-2 \mid f\left(x\right)\right)$.

a) Bestimmen Sie die Geradengleichung.

Lösung:

$$f\left(-2\right) \quad = \quad \frac{-2-3}{-2+1} \quad = \quad 5 \quad \xrightarrow[b=0]{\text{Ursprungsgerade}} \quad g\left(x\right) \quad = \quad -\frac{5}{2}x$$

b) Zeichnen Sie nun die Funktion f(x) und die Gerade in ein Koordinatensystem.



c) In welchem Punkt schneidet die gesuchte Gerade die Funktion f(x) zum zweiten Mal?

Bestimmen Sie die Lösung mittels Rechnung!

Lösung:

$$Schnittpunkte: \quad f(x) = g(x) \Rightarrow \frac{x-3}{x+1} = -\frac{5}{2}x$$

$$\xrightarrow{\cdot(x+1)} \quad x-3 = -\frac{5}{2}x^2 - \frac{5}{2}x \Rightarrow \frac{5}{2}x^2 + \frac{7}{2}x - 3 = 0$$

$$\xrightarrow{Lösungsformel} \quad x_1 = -2 \quad und \quad x_2 = \frac{3}{5}$$

$$\xrightarrow{y-Wert} \quad g\left(\frac{3}{5}\right) = -\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{5} = -\frac{3}{2} \Rightarrow S_2\left(\frac{3}{5} \,\middle|\, -\frac{3}{2}\right)$$

6.) Ein Stein, der im Wasser sinkt

Ein Stein, der in einem 20 m tiefen Gewässer sinkt, erreicht nach **t** Sekunden die Tiefe

$$f(t) = \frac{4}{4+t} + 1,5t - 1$$

in Metern.

a) Welcher Definitions- und Wertebereich wären hier sinnvoll?

Lösung: $D = [0;\infty[\qquad W = [0;20]$

b) Nach welcher Zeit hat der Stein den Boden des Gewässers erreicht?

Lösung:

$$f(t) = 20 \Rightarrow \frac{4}{4+t} + 1,5t - 1 = 20 \xrightarrow{\cdot(4+t)}$$

$$\Rightarrow 4 + 1,5t\cdot(4+t) - 21\cdot(4+t) = 0$$

$$\Rightarrow 4 + 6t + 1,5t^2 - 84 - 21t = 0 \Rightarrow 1,5t^2 - 15t - 80 = 0$$

$$\xrightarrow{Lösungsformel} \quad t_1 = 13,85\,[Sek.] \quad und$$

$$t_2 = -3,85\,[Sek.] \quad aber: t_2 \; nicht \; definiert!$$

c) Welche durchschnittliche Weglänge legt der Stein innerhalb der ersten 10 Sekunden zurück.

Lösung:

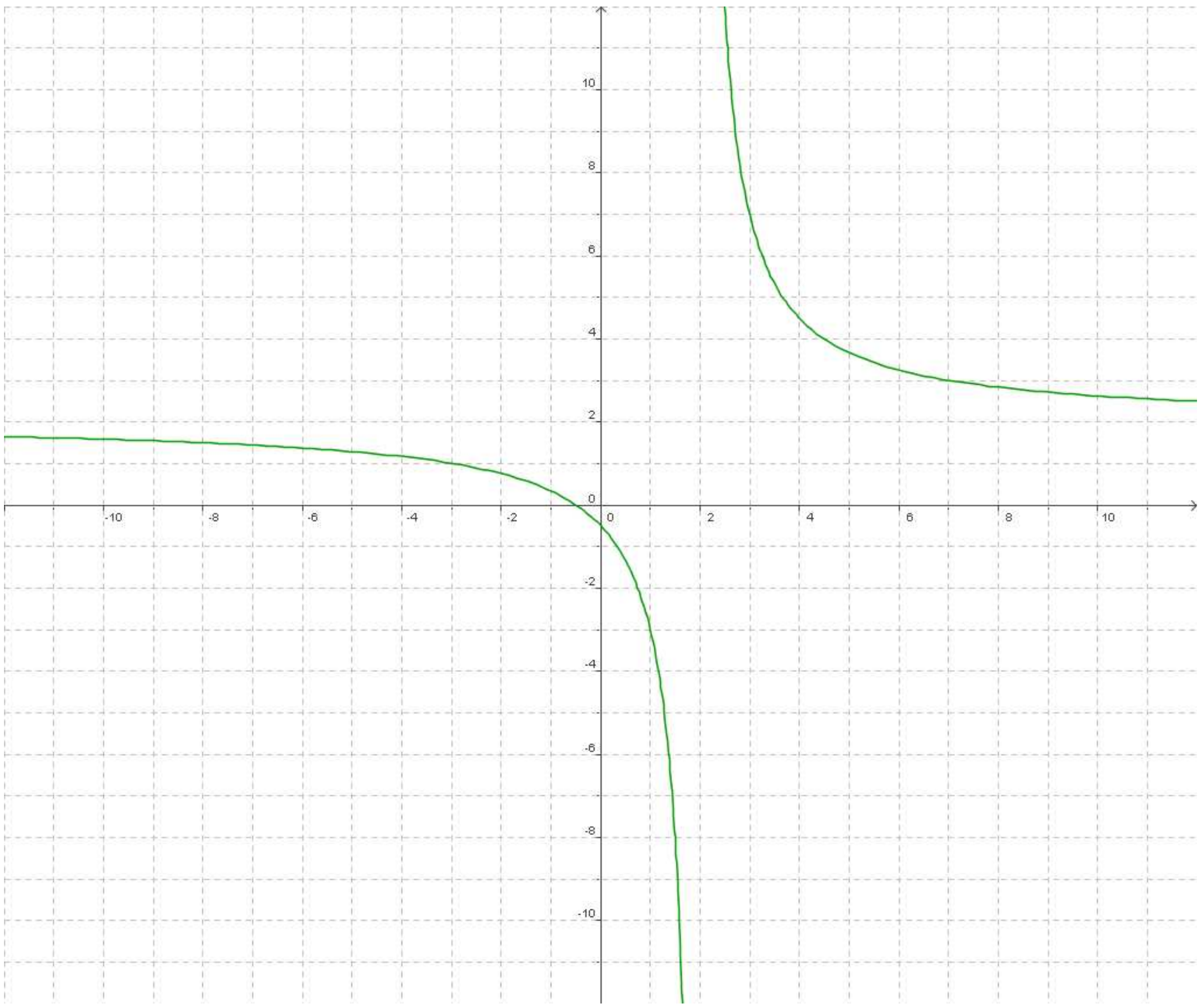
$$f(0) = \frac{4}{4+0} + 1{,}5 \cdot 0 - 1 = 0 \quad und \quad f(10) = \frac{4}{4+10} + 1{,}5 \cdot 10 - 1 = 14\frac{2}{7}$$

$$\Delta s = \frac{14\frac{2}{7} - 0}{10 - 0} = \frac{10}{7} \quad \left[\text{durchschnittliche Weglänge pro Sekunde}\right]$$

7.) Zuordnung: Funktion - Graph

Gegeben seien drei Funktionsvorschriften f1 bis f3 und ein Graph.

$$f1(x) = \frac{2-4x}{2x-4} \qquad f2(x) = \frac{2+4x}{2x-4} \qquad f3(x) = \frac{2-4x}{2x+4}$$



a) Auf welche der drei Funktionsvorschriften passt der Graph?

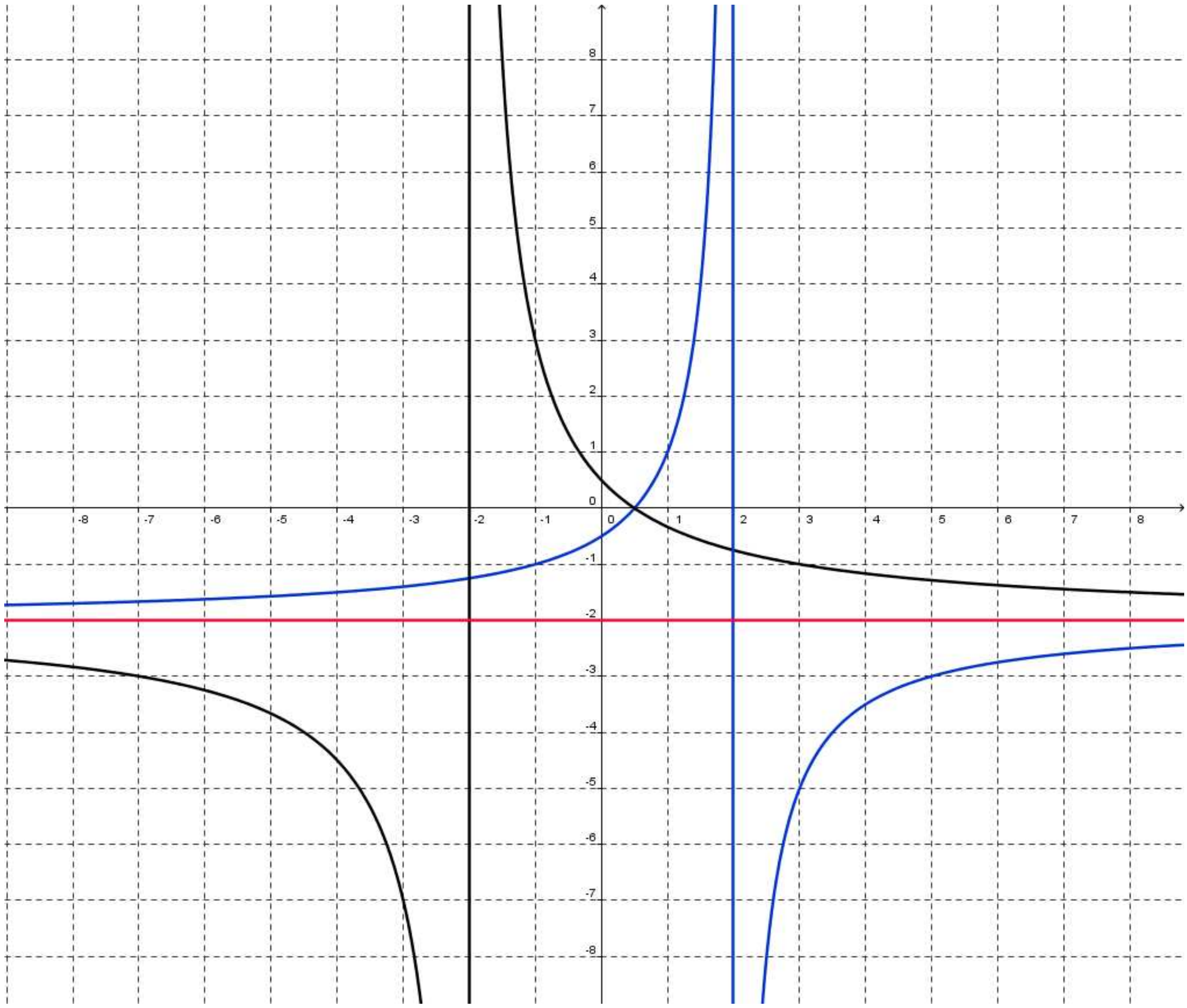
Lösung: *Die Funktionsvorschrift f2 passt auf den Graphen.*

Eigenschaften:
Nullstelle: x = - 0,5; Polstelle: x = 2; Asymptote: a(x) = 2

b) Zeichnen Sie die beiden anderen Funktionsvorschriften in das obige Koordinatensystem.

Begründen Sie die Zuordnung und die Zeichnung aufgrund der Nullstellen, der Asymptote und der und Polstellen!

Lösung:



$$f1(x) = \frac{2-4x}{2x-4} \qquad f3(x) = \frac{2-4x}{2x+4}$$

Eigenschaften f1(x): Nullstelle: x = 0,5; ***Polstelle: x = 2****; Asymptote: a(x) = - 2*

Eigenschaften f2(x): Nullstelle: x = 0,5; ***Polstelle: x = - 2****; Asymptote: a(x) = - 2*

8.) Zuordnung: Frage - Antwort

Tragen Sie in der mittleren Spalte bei jeder Aufgabenstellung den korrekten Lösungsbuchstaben ein. Beachten Sie: Es gibt mehr Lösungsbuchstaben als Aufgaben. Ein Lösungsbuchstabe darf mehrmals verwendet werden.			
Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}$ mit maximaler Definitionsmenge D	*Lösungen*	A	1 und 2
		B	1
		C	0 und 2
1 In D sind folgende Zahlen *nicht* enthalten:	D	D	- 2 und 2
2 Die Funktion f hat die Nullstelle(n) x =	B	E	2
3 Die Funktion f hat die Unendlichkeitsstelle x =	F	F	- 2
4 Die Funktion f hat die behebbare Definitionslücke x =	E	G	28
5 Der Graph von f hat die waagrechte Asymptote mit der Gleichung y =	B	H	- 1
6 Der Grenzwert von f(x) für x gegen 2 hat den Wert	K	I	$\frac{1}{4}$ und 1
7 Die Funktionswerte f(x) sind größer als 3 für alle x-Werte kleiner als -2 und größer als	J	J	-3,5
8 Die Anzahl der Schnittpunkte zwischen dem Graphen von f und der Geraden mit der Gleichung y = x beträgt	M	K	$\frac{1}{4}$
		L	4
		M	0

Berechungen:

$$Nullstellen\ Zähler: \quad x^2 - 3x + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1 \quad und \quad x_2 = 2$$

$$Nullstellen\ Nenner: \quad x^2 - 4 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -2 \quad und \quad x_2 = 2$$

$$Auswertung: \quad x = 1\,(Nullstelle) \quad x = -2\,(Polstelle) \quad x = 2\,(Lücke)$$

$$Asymptote: \quad a(x) = 1 \quad (Zählergrad = Nennergrad)$$

$$\lim_{x\to 2} f(x) \quad = \quad \lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4} \quad = \quad \lim_{x\to 2} \frac{(x-1)(x-2)}{(x+2)(x-2)} \quad = \quad \lim_{x\to 2} \frac{(x-1)}{(x+2)} \quad = \quad \frac{1}{4}$$

$$f(x) \quad = \quad \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4} \quad > \quad 3 \quad \xrightarrow{\cdot(x^2-4)} \quad x^2 - 3x + 2 \quad > \quad 3x^2 - 12$$

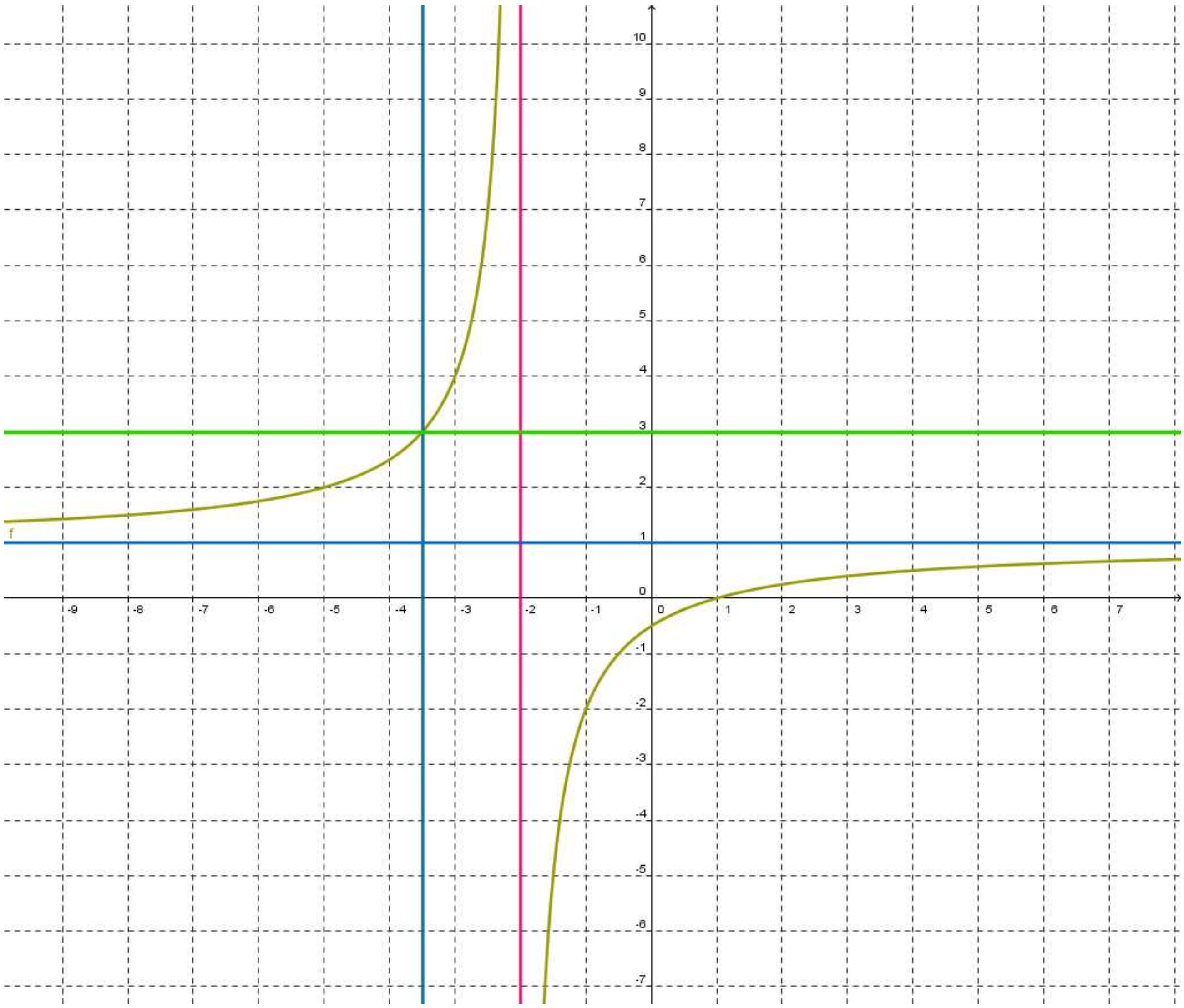
Das Ungleichheitszeichen bleibt erhalten, da der Term ($x^2 - 4$) für x < -2 positiv ist!

$$\Rightarrow \quad -2x^2 - 3x + 14 \quad = \quad 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -3{,}5 \quad und \quad x_2 = 2\,[Lücke!!!]$$

$$f(x) \quad = \quad \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4} \quad = \quad x \quad \xrightarrow{\cdot(x^2-4)} \quad x^2 - 3x + 2 \quad > \quad x^3 - 4x$$

$$\Rightarrow \quad x^3 - x^2 - x - 2 \quad = \quad 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 2\,[Lücke!!!] \quad \Rightarrow \quad kein\ Schnittpunkt$$

$$\Rightarrow \quad (x^2 + x + 1)(x - 2) \quad = \quad 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} \quad \Rightarrow \quad \text{keine weiteren Lösungen}$$



f