Musterlösung **11. Jgst.** **3. Kursarbeit** **Datum: 20.03.2009**

Klasse: GY GS 08 a **Fach: Mathematik (Kernfach)**

Thema: Gebrochen-rationale Funktionen; Stetigkeit & Differenzierbarkeit; Pascalsches Dreieck und Distributivgesetz

---

1.) Gebrochen-rationale Funktionen I

Untersuchen Sie die drei folgenden Funktionen hinsichtlich folgender Eigenschaften:

Nullstellen, Polstellen, Lücken, Asymptote und S_y

a) $$g(x)=\frac{4x-8}{x^2-9}$$

Lösung:

$$\textit{Zähler}:\quad 4x-8=0 \quad\Rightarrow\quad x=2 \quad [\textit{Nullstelle}]$$

$$\textit{Nenner}:\quad x^2-9=0 \quad\Rightarrow\quad x_1=-3 \quad [\textit{Pol mit VZW}] \quad \textit{und} \quad x_2=3 \quad [\textit{Pol mit VZW}]$$

$$\textit{Lücke}:\quad \textit{keine} \qquad S_y\left(0 \,\middle|\, \frac{8}{9}\right)$$

$$\textit{Asymptote}: \textit{Zählergrad} < \textit{Nennergrad} \quad\Rightarrow\quad a(x)=0$$

b) $$f(x) = \frac{(2x-6)^2}{(2x+3)(x-3)}$$

Lösung:

$$\textit{Zähler}:\quad (2x-6)^2=0 \quad\Rightarrow\quad x=3$$

$$\textit{Nenner}:\quad (2x+3)(x-3)=0 \quad\Rightarrow\quad x_1=-\frac{3}{2} \quad [\textit{Pol mit VZW}] \quad \textit{und} \quad x_2=3$$

$$\textit{Lücke}:\quad x=3 \qquad S_y(0 \mid -4)$$

$$\textit{Asymptote}: \textit{Zählergrad} = \textit{Nennergrad} \quad\Rightarrow\quad a(x)=2$$

c) $f(x) = \dfrac{x^2-5x+2,25}{(x-4)^2}$

Lösung:

$$Zähler: \quad x^2-5x+2,25=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=\frac{9}{2} \quad [Nullstelle] \quad und \quad x_2=\frac{1}{2} \quad [Nullstelle]$$

$$Nenner: \quad (x-4)^2=0 \quad \Rightarrow \quad x=4 \quad [Pol\ ohne\ VZW]$$

$$Lücke: \quad keine \qquad S_y\left(0 \,\middle|\, \frac{9}{64}\right)$$

$$Asymptote: Zählergrad = Nennergrad \quad \Rightarrow \quad a(x)=1$$

2.) Gebrochen-rationale Funktionen mit Parameter

Gegeben ist die Funktion $f_t(x)=\dfrac{tx^2-tx-1}{x} \quad mit \ \ t\in\Re\setminus\{0\}$

Für welchen Wert von **t** besitzt die Funktion genau eine Nullstelle?

Anmerkung: Denken Sie an die Diskriminante!

Lösung: Diskriminante berechnen:

$$D = b^2-4ac \quad \Rightarrow \quad D = t^2-4\cdot t\cdot(-1) = t^2+4t$$

=> eine Lösung: $t^2+4t = 0 \quad \Rightarrow \quad t(t+4) = 0$

$$\Rightarrow \quad t = 0 \quad und \quad t+4 = 0$$

$$\Rightarrow \quad t = 0\,[nicht\ definiert!] \quad und \quad t = -4$$

3.) Gebrochen-rationale Funktionen II

Geben Sie je eine gebrochen-rationale Funktionsvorschrift an, deren Graph folgende Eigenschaften besitzt.

a) Pol an der Stelle x = 2, Nullstelle bei x = - 2 und eine Asymptote mit a(x) = 4.

Lösung: $$f(x) = \frac{4(x+2)}{x-2}$$

b) Pol an der Stelle x = - 3 und eine einfache Nullstelle bei x = 5.

Lösung: $$f(x) = \frac{x-5}{x+3}$$

c) Pol an der Stelle x = - 1, behebbare Lücke bei x = 5, eine doppelte Nullstelle bei x = 2, Asymptote a(x) = 0,5
Zählergrad: n = 4

Lösung: $$f(x) = \frac{(x-2)^2(x-5)^2}{2(x+1)^3(x-5)}$$

4.) Stetigkeit

Für welchen Wert von k ist die Funktion $f_k(x)$ stetig?

Begründen Sie zudem Ihre Entscheidung:

$$f_k(x) = \begin{cases} kx^2 - 2kx & x < 2 \\ \frac{1}{k}x - \frac{1}{2}k & x \geq 2 \end{cases}$$

Lösung:

$$\lim_{h\to 0^-} k(2-h)^2 - 2k(2-h) = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{k}(2+h) - \frac{1}{2}k \Rightarrow 4k - 4k = \frac{2}{k} - \frac{1}{2}k$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{2}{k} - \frac{1}{2}k \xrightarrow{\cdot k} 2 - \frac{1}{2}k^2 = 0 \Rightarrow k^2 = 4$$

$$\Rightarrow k_1 = 2 \quad und \quad k_2 = -2$$

5.) Differentialquotient

a) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion

$$f(x) = \frac{2}{3}x^2 + 2x$$

mit Hilfe des Differentialquotienten bzw. mit der h-Methode.

Lösung:

$$m_{\tan} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{2}{3}(x+h)^2+2(x+h)-\left(\frac{2}{3}x^2+2x\right)}{h}$$

$$m_{\tan} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{2}{3}x^2+\frac{4}{3}xh+\frac{2}{3}h^2+2x+2h-\frac{2}{3}x^2-2x}{h}$$

$$m_{\tan} = \lim_{h\to 0}\frac{h\left(\frac{4}{3}x+\frac{2}{3}h+2\right)}{h} = \lim_{h\to 0}\left(\frac{4}{3}x+\frac{2}{3}h+2\right) = \frac{4}{3}x+2 = f'(x)$$

b) Begründen Sie, warum die Ableitung einer Konstanten $f(x) = c$ immer 0 ergibt.

Lösung:

$$m_{\tan} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h}$$

$$m_{\tan} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = 0 = f'(x)$$

6.) Ableitungen von Funktionen

Bilden Sie die erste Ableitung mit Hilfe der Regel zur Ableitung von Potenzfunktionen:

a) $$f(x) = \frac{1}{2}x^6 + 3x^2 - x + 4$$

Lösung: $$f'(x) = 3x^5 + 6x - 1$$

b) $f(x) = 2x^4 + \frac{1}{2}x^3 - 3x^2$

Lösung: $f'(x) = 8x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 6x$

c) $f_k(x) = 2k^2x^2 + 3kx - 4k$

Lösung: $f_k'(x) = 4k^2x + 3k$

d) $f(x) = \frac{1}{n}x^n + 2x^{n-2}$

Lösung: $f'(x) = x^{n-1} + 2(n-2)x^{n-3}$

8.) Ausmultiplizieren von Klammertermen und Pascal

Rechnen Sie die Klammerterme aus und vereinfachen Sie so weit wie möglich.

a) $(x+3)^3$

Lösung:

$$(x+3)^3 = 1\cdot x^3\cdot 3^0 + 3\cdot x^2\cdot 3^1 + 3\cdot x\cdot 3^2 + 1\cdot x^0\cdot 3^3$$

$$(x+3)^3 = x^3 + 9x^2 + 27x + 27$$

b) $(3x+2)^5$

Lösung:

$$(3x+2)^5 = 1\cdot(3x)^5\cdot 2^0 + 5\cdot(3x)^4\cdot 2^1 + 10\cdot(3x)^3\cdot 2^2 + 10\cdot(3x)^2\cdot 2^3 + 5\cdot(3x)^1\cdot 2^4 + 1\cdot(3x)^0\cdot 2^5$$

$$(3x+2)^5 = 243x^5 + 810x^4 + 1.080x^3 + 720x^2 + 240x + 32$$

c) $$\left[\frac{1}{3}x+(-6)\right]^4$$

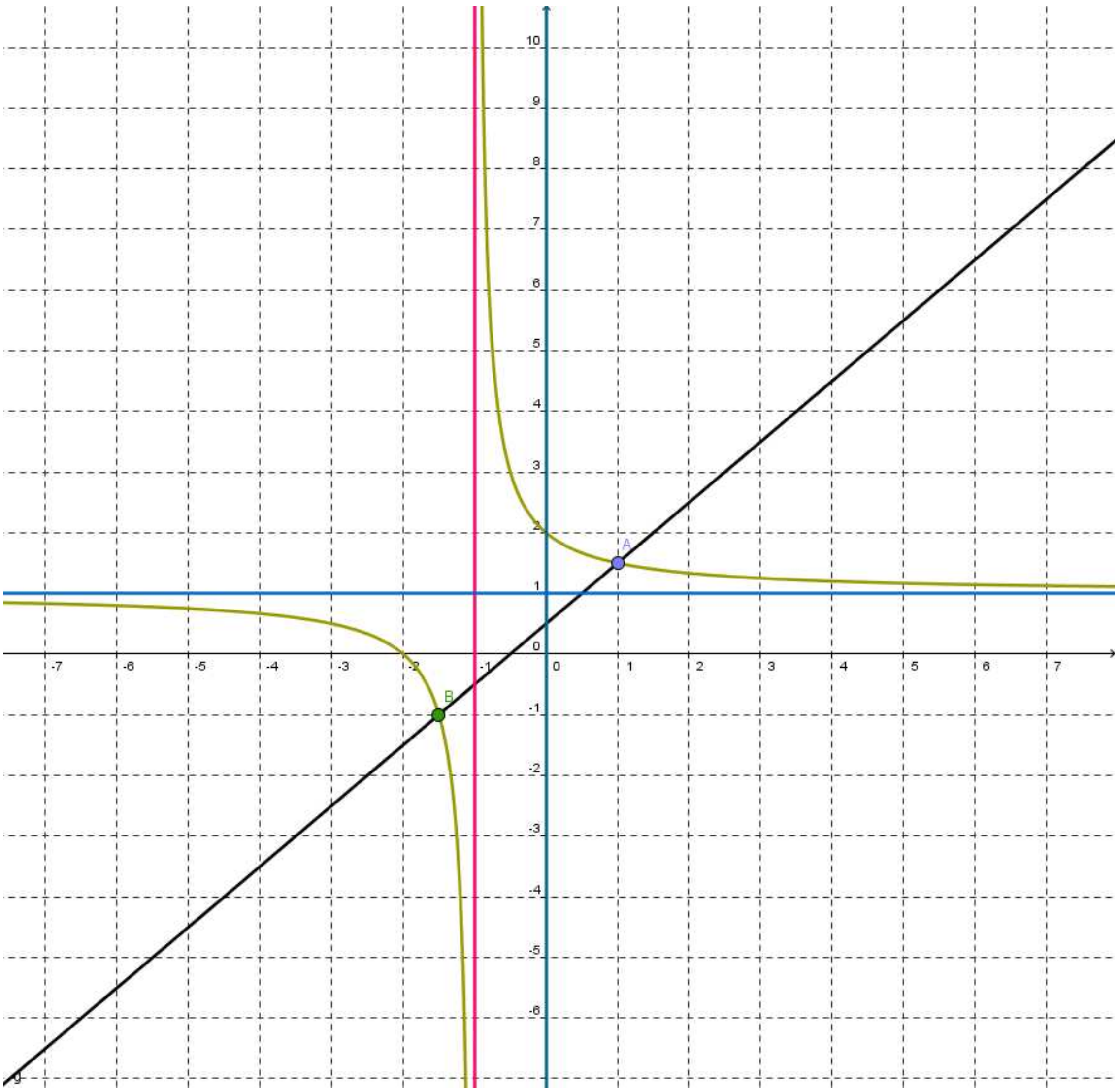
Lösung:

$$\left[\frac{1}{3}x+(-6)\right]^4 = 1\cdot\left(\frac{1}{3}x\right)^4\cdot(-6)^0+4\cdot\left(\frac{1}{3}x\right)^3\cdot(-6)^1+6\cdot\left(\frac{1}{3}x\right)^2\cdot(-6)^2$$

$$+4\cdot\left(\frac{1}{3}x\right)^1\cdot(-6)^3+1\cdot\left(\frac{1}{3}x\right)^0\cdot(-6)^4$$

$$\left[\frac{1}{3}x+(-6)\right]^4 = \frac{1}{81}x^4-\frac{8}{9}x^3+24x^2-288x+1.296$$

7.) Zuordnung: Frage - Antwort



Tragen Sie in der mittleren Spalte bei jeder Aufgabenstellung den korrekten Lösungsbuchstaben ein.
Beachten Sie: Es gibt mehr Lösungsbuchstaben als Aufgaben.
Ein Lösungsbuchstabe darf mehrmals verwendet werden.

Aufgabe	<u>*Lösungen*</u>		
Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{x^2+x-2}{x^2-1}$ mit maximaler Definitionsmenge D		A	1
		B	1 und - 1
		C	0 und 2
1 In D sind folgende Zahlen <u>*nicht*</u> enthalten:	B	D	- 2 und 1
2 Die Funktion f hat die Nullstelle(n) x =	F	E	2
3 Die Funktion f hat die Unendlichkeitsstelle x =	H	F	- 2
4 Die Funktion f hat die behebbare Definitionslücke x =	A	G	0
5 Der Graph von f hat die waagrechte Asymptote mit der Gleichung y =	A	H	- 1
6 Der Grenzwert von f(x) für x gegen 1 hat den Wert	J	I	$\frac{1}{2}$
7 Die Funktionswerte f(x) sind größer als 2 für alle x-Werte größer als -1 und kleiner als	G	J	1,5
8 Die Anzahl der Schnittpunkte zwischen dem Graphen von f und der Geraden mit der Gleichung y = x + 0,5 beträgt	A	K	$\frac{1}{3}$
		L	3
		M	keine