Musterlösung **11. Jgst.** **2. Kursarbeit** **Datum: 21.11.2008**

Klasse: GY GS 08 **Fach: Mathematik (Kernfach)**

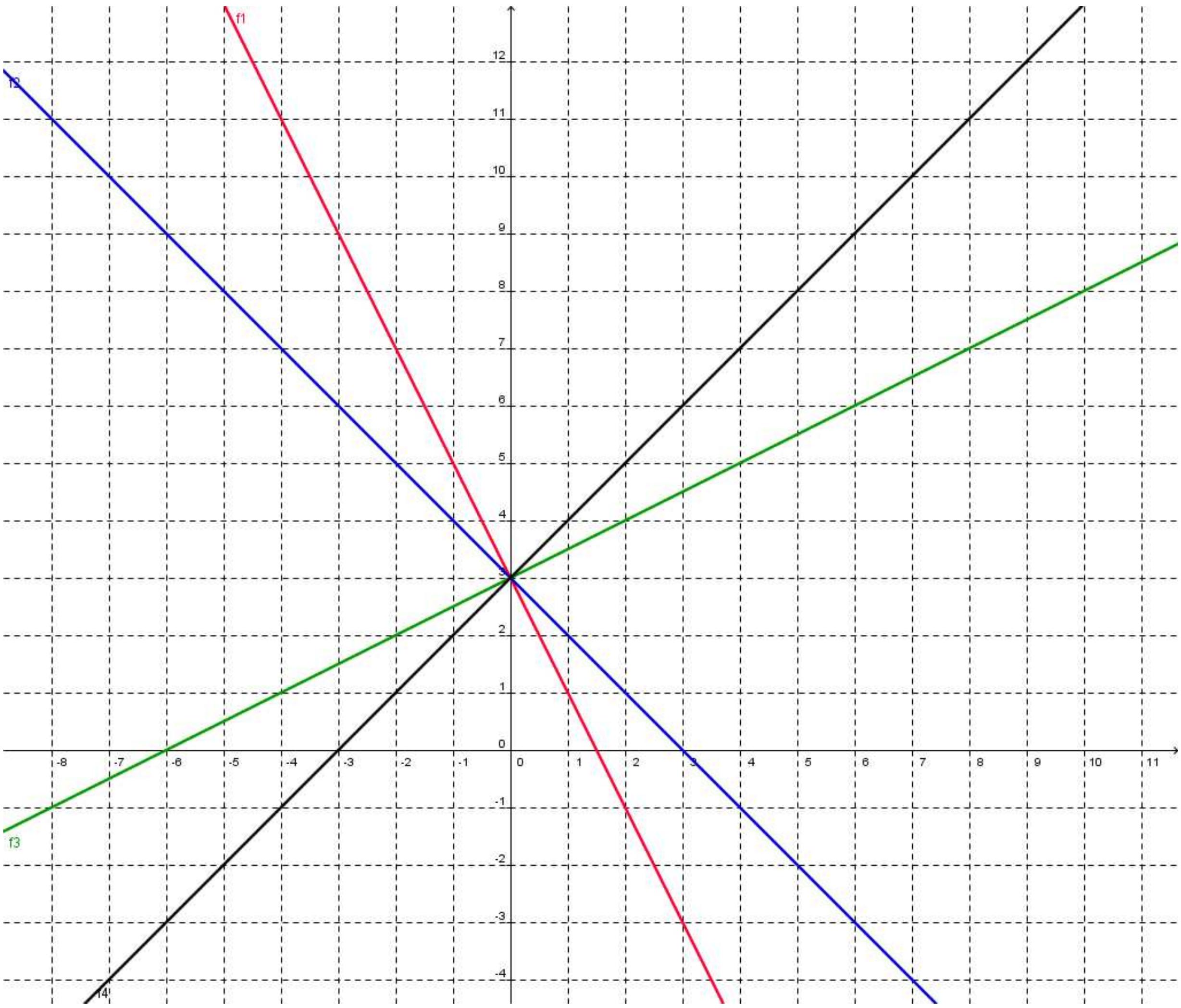
Thema: **Lineare Funktionen; Heron-Verfahren; Abschnittweise definierte Funktionen; Ganzrationale Funktionen; Polynomdivision**

1.) Geradengleichungen

Gegeben ist die Geradenschar $f_t(x) = \frac{1}{2}tx + 3$.

a) Zeichnen Sie die Geraden für $t \in \{-4; -2; 1; 2\}$ in ein Koordinatensystem.

Lösung:



b) In welchem Punkt schneiden sich alle Geraden dieser Schar?
Warum ist dies so?

Lösung: Im Punkt P(0 / 3) schneiden sich alle Geraden,
weil der y-Achsenabschnitt parameterfrei ist.

c) Für welchen Wert von **t** wird die dazugehörige Gerade parallel zur ersten Winkelhalbierenden?

Lösung: für **t** = 2 folgt: m = 1 = Steigung der 1. Winkelhalbierenden

d) Für welchen Wert von **t** geht die Gerade durch den Punkt A (6 / 12)?

Lösung: $12 = \frac{1}{2}t \cdot 6 + 3 \xrightarrow{-3} 9 = 3t \xrightarrow{:3} t = 3$

e) Welche Steigung hat eine zu $f_t(x)$ senkrechte Gerade?

Lösung: $m_1 \cdot m_2 = -1 \Rightarrow \frac{1}{2}t \cdot m_2 = -1 \Rightarrow \frac{1}{2}t \cdot m_2 = -\frac{2}{t}$

f) Wie groß ist die Fläche des Dreiecks, das durch die Gerade für **t** = - 2 und mit den Koordinatenachsen begrenzt wird?

Lösung:

Nullstelle der Funktion berechnen:

$$f_{-2}(x) = \frac{1}{2}(-2)x + 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$

$$Dreiecksfläche: \quad A = \frac{g \cdot h}{2} \Rightarrow A = \frac{3 \cdot 3}{2} = 4{,}5$$

g) Welche beiden Schargeraden begrenzen mit den Koordinatenachsen ein Dreieck mit einem Flächeninhalt von A = 13,5 cm^2?

Lösung:

$$Dreiecksfläche: \quad A = \frac{g \cdot h}{2} \xrightarrow[Fläche = 13{,}5]{Höhe = 3} 13{,}5 = \frac{g \cdot 3}{2} \Rightarrow g = 9$$

t_1-Wert für Nullstelle x = 9 berechnen:

$$0 = \frac{1}{2}t \cdot 9 + 3 \Rightarrow t = -\frac{2}{3}$$

t_2-Wert für Nullstelle x = - 9 berechnen:

$$0 = \frac{1}{2}t \cdot (-9) + 3 \Rightarrow t = \frac{2}{3}$$

2.) Abschnittweise definierte Funktionen

Gegeben sei die abschnittweise definierte Funktion:

$$f(x) = \begin{cases} 3tx+1 & \text{für } x<3 \\ 4x-2 & \text{für } x=3 \\ -2x+4k & \text{für } x>3 \end{cases}$$

Für welche Werte von **t** und k hat die Funktion keine Sprungstellen?

Lösung:

$$\textit{Bekannt}: \quad f(3) = 4\cdot 3-2 = 10$$

$$\textit{Berechnung } t-\textit{Wert}: \quad 3t\cdot 3+1 = 10 \Rightarrow t = 1$$

$$\textit{Berechnung } k-\textit{Wert}: \quad -2\cdot 3+4k = 10 \Rightarrow k = 4$$

3.) Dreieck & Parallelogramm

Ein Dreieck sei durch die Punkte P(1 / 2), Q(8 / 3) und R(3 / 6) festgelegt.

a) Berechnen Sie den Abstand zwischen den Punkten P und Q?

Lösung: $e = \sqrt{(8-1)^2+(3-2)^2} = \sqrt{7^2+1^2} = \sqrt{50}$

b) Berechnen Sie die Geradengleichung, auf der die Punkte P und Q liegen.

Lösung:

$$m = \frac{3-2}{8-1} = \frac{1}{7}$$

Punkt P(1 / 2) eingesetzt: $2 = \frac{1}{7}\cdot 1+b \Rightarrow b = \frac{13}{7} \Rightarrow h(x) = \frac{1}{7}x+\frac{13}{7}$

c) Berechnen Sie die Mittelsenkrechte auf die Seite QR.

Lösung:

x-Koordinate des Mittelpunktes: $x_M = \frac{1}{2}(8+3) = \frac{11}{2} = 5{,}5$

y-Koordinate des Mittelpunktes: $y_M = \frac{1}{2}(3+6) = \frac{9}{2} = 4{,}5$

$\Rightarrow M(5{,}5 \mid 4{,}5)$

Steigung der Geraden zwischen Q und R berechnen:

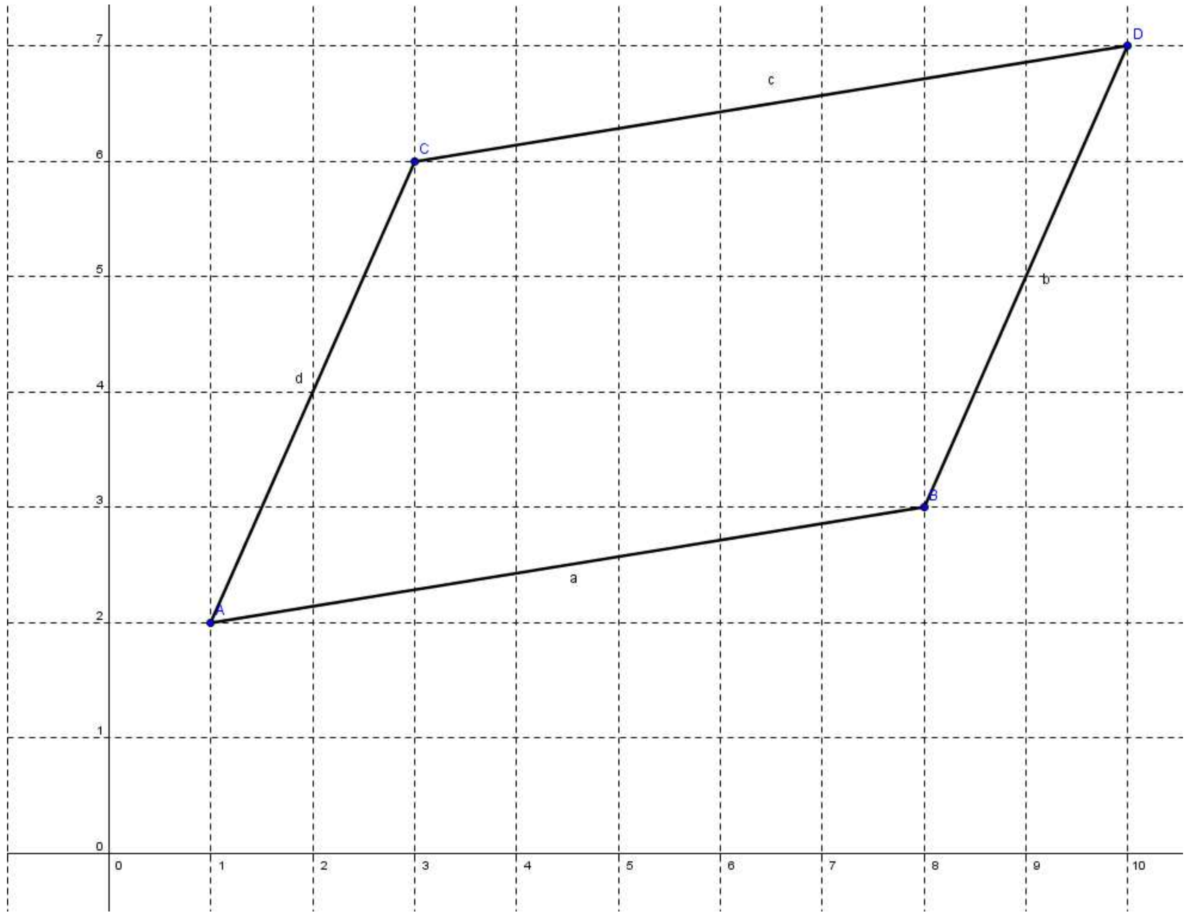
$$m_1 = \frac{6-3}{3-8} = -\frac{3}{5} \xrightarrow{orthogonal} m_2 = \frac{5}{3}$$

Punkt M(5,5 / 4,5) eingesetzt: $\frac{9}{2} = \frac{5}{3} \cdot \frac{11}{2} + b \Rightarrow b = \frac{27}{6} - \frac{55}{6} = \frac{14}{3} \Rightarrow h(x) = \frac{5}{3}x + \frac{14}{3}$

Es soll nun ein vierter Punkt S hinzugefügt werden, damit aus dem Dreieck ein Parallelogramm wird.

d) Zeichnen Sie das Dreieck und konstruieren Sie das Parallelogramm.

Lösung: Möglichkeit 1 über die Diagonale BC



e) Wie kann der gesuchte vierte Punkt berechnet werden?
Führen Sie diese Berechnung durch.

Lösung: Möglichkeit 1 über die Diagonale BC

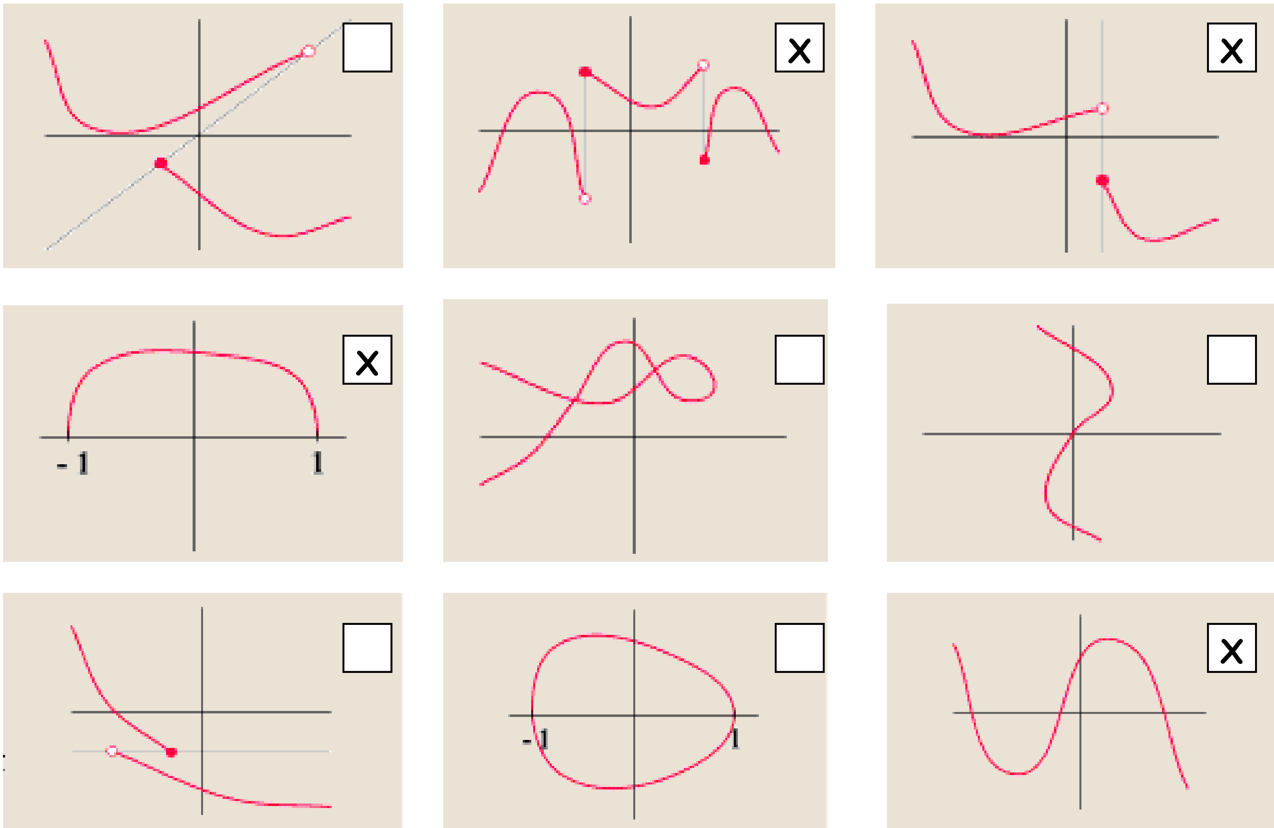
Zur x-Koordinate des Punktes Q wird die x-Differenz zwischen P und R

und zur y-Koordinate des Punktes R die y-Differenz zwischen P und Q addiert:

S(8+2 / 6+1) = S(10 / 7)

4.) Funktionen?

Welche vier Schaubilder stellen Funktionen dar? Kreuzen Sie diese an!



5.) Textaufgabe I

Kunigunde Saftkeks ist im Auftrag ihrer Firma als Verkäuferin von gesundheitsfördernden Müsliriegeln unterwegs.
Die Müsliriegel kosten 1,25 € pro Stück.

a) Wie sollte die Müsli-Firma heißen?

Lösung: freie Antwort möglich

Sie hat die Auswahl zwischen zwei Gehaltsangeboten:

(i) Ein Festgehalt von 1.500,00 € unabhängig vom Verkaufserlös.

(ii) Neben einen Grundgehalt von 500,00 € erhält sie 10 Cent Provision von jeden verkauften Müsliriegel.

b) Stellen Sie die zwei Gehaltsangebote als lineare Funktionsgleichungen dar, wobei x die Anzahl der verkauften Riegel darstellen soll.

Lösung: $f_1(x) = 1.500 \qquad f_2(x) = 0{,}1x + 500$

Kunigunde hat sich für das zweite Angebot entschieden.

c) Welches Gehalt verdient Kunigunde, wenn sie 15.000 Müsliriegel verkauft.

Lösung:

$$f_2(15.000) = 0{,}1 \cdot 15.000 + 500 = 1.500 + 500 = 2.000$$

d) Berechnen Sie die Anzahl, ab welcher das zweite Angebot besser als das erste wäre.

Lösung:

$$1.500 = 0{,}1x + 500 \xrightarrow{-500} 1.000 = 0{,}1x$$

$$\xrightarrow{\cdot 10} x = 10.000$$

6.) Textaufgabe II

Zwei unterschiedlich geschulte Bergsteigergruppen beschließen einen 3.500 m hohen Berg zu besteigen. Die Gruppen fahren mit einem Lift hinauf.

Die besser trainierte Gruppe steigt in 1.000 m Höhe an der Mittelstation aus, die andere Gruppe fährt bis zur Bergstation in 1.600 m Höhe.

Um 10:00 Uhr beginnen beide Gruppen ihren Aufstieg, wobei die gut trainierte Gruppe einen Höhenunterschied von 400 m pro Stunde, die weniger gut trainierte Gruppe einen Höhenunterschied von 250 m pro Stunde bewältigt.

a) Stellen Sie die Funktionsterme der einzelnen Höhen in Abhängigkeit von der Zeit für beide Gruppen auf.

Lösung: $f_1(t) = 400t + 1.000$ $\qquad f_2(t) = 250t + 1.600$

b) Um wie viel Uhr treffen sich beide Gruppen und auf welcher Höhe befinden sie sich dann?

Lösung:

$$f_1(t) = f_2(t)$$

$$400t + 1.000 = 250t + 1.600 \xrightarrow[(2)\ \ -250t]{(1)\ \ -1.000} 150t = 600$$

$$\xrightarrow{:150} t = 4 \Rightarrow f_1(4) = 2.600$$

Die Gruppen treffen sich voraussichtlich um 14:00 Uhr.

c) Wann erreichen die beiden Gruppen jeweils den Gipfel?

Lösung:

$$3.500 = 400t + 1.000 \xrightarrow[(2)\ \ :400]{(1)\ \ -1.000} t = \frac{25}{4} = 6[h]15[\min]$$

$$3.500 = 250t + 1.600 \xrightarrow[(2)\ \ :250]{(1)\ \ -1.600} t = \frac{38}{5} = 7[h]36[\min]$$

7.) Ganzrationale Funktionen

Berechnen Sie alle Nullstellen der gegebenen ganzrationalen Funktionen:

a) $$f(x) = x^3 + x^2 - 10x + 8$$

Lösung: Erste Nullstelle raten => Horner-Schema oder Polynomdivision; dann anwenden Lösungsformel für quadratische Gleichungen

$$L = \{-4; 1; 2\}$$

b) $$f(x) = -3x^3 + 7x^2 - 7x + 3$$

Lösung: Erste Nullstelle raten => Horner-Schema oder Polynomdivision; dann anwenden Lösungsformel für quadratische Gleichungen

$$L = \{1\}$$

Zusatzfrage:

8.) Mathematische Ausdrucksformen

Übersetzen Sie folgende Aussagen in eine mathematische Ausdrucksform bzw. Schreibweise:

a) Der Funktionswert an der Stelle 5 beträgt – 4.

Lösung: f(5) = - 4

b) Alle Funktionswerte der Funktion f(x) sind positiv.

Lösung: f(x) > 0

c) Die Funktion h(x) ist nur für positive Werte definiert.

Lösung: $D = \Re^+$

d) Die Funktionen f(x) und g(x) besitzen an der Stelle x = 5 den selben Funktionswert.

Lösung: f(5) = g(5)

e) An der Stelle x = 3 ist der Funktionswert von g(x) kleiner als an der Stelle x = 10.

Lösung: g(3) < g(10)