Musterlösung **11. Jgst.** **1. Test** **Datum: 21.09.2007**

Klasse: GY 07 d **Fach: Mathematik (Kernfach)**

Thema: **Erweitertes Distributivgesetz, Summenzeichen, Lineare Gleichungen und LGS, Quadratische Gleichungen, Funktionen (allgemein) und lineare Funktionen**

1.) Erweitertes Distributivgesetz

Multiplizieren Sie die Klammerterme aus und fassen Sie so weit wie möglich zusammen:

a) $\left(\frac{2}{3}a-2\right)^2\cdot\left(a^2+1\right)$ b) $\left(-\frac{1}{4}a+5x\right)\cdot\left(2a^2-\frac{1}{10}x\right)$

Lösung:

$$\left(\frac{2}{3}a-2\right)^2\cdot\left(a^2+1\right)=\left(\frac{4}{9}a^2-\frac{8}{3}a+4\right)\cdot\left(a^2+1\right)=\frac{4}{9}a^4-\frac{8}{3}a^3+\frac{40}{9}a^2-\frac{8}{3}a+4$$

$$\left(-\frac{1}{4}a+5x\right)\cdot\left(2a^2-\frac{1}{10}x\right) \quad = \quad -\frac{1}{2}a^3+\frac{1}{40}ax+10a^2x-\frac{1}{2}x^2$$

2.) Gleichungssysteme

Lösen Sie die Gleichungssysteme nach einem Verfahren Ihrer Wahl:

$a)$ $I.)$ $3x-3y=3$ $\quad$ $b)$ $I.)$ $x\cdot y=9$

$II.)$ $2x+y=11$ $\quad$ $II.)$ $x^2+y^2=82$

Lösung:

$$a)\quad I.)\quad 3x-3y=3 \qquad II.)\quad 2x+y=11$$

$$\xrightarrow{I.)+3\cdot II.)} \quad 9x=36 \quad \xrightarrow{:9} \quad x=4 \quad \Rightarrow \quad y=3$$

$$b)\quad I.)\quad x\cdot y=9 \qquad II.)\quad x^2+y^2=82$$

$$\Rightarrow \quad y=\frac{9}{x} \quad \xrightarrow{einsetzen} \quad x^2+\left(\frac{9}{x}\right)^2=82$$

$$\Rightarrow \quad x^4-82x^2+81=0 \quad \xrightarrow{Subst.} \quad u^2-82u+81=0 \quad \Rightarrow \quad u_1=1 \quad \wedge \quad u_2=81$$

$$\xrightarrow{\text{ReSubst.}} \quad x_1=-1 \quad \wedge \quad x_2=1 \quad \wedge \quad x_3=-9 \quad \wedge \quad x_4=9$$

$$\xrightarrow{\text{y-Werte: } y=\frac{9}{x}} \quad y_1=-9 \quad \wedge \quad y_2=9 \quad \wedge \quad y_3=-1 \quad \wedge \quad y_4=1$$

3.) (Bi)Quadratische Gleichungen und Lösungsverhalten

a) Lösen Sie die Gleichungen nach einem Verfahren Ihrer Wahl:

(i) $x^2-4x-4=1$ (ii) $0,5x^2-2x-2,5=0$

(iii) $x^4-5x^2+4=0$

Lösung:

(i) $x^2-4x-4=1 \quad\Rightarrow\quad x^2-4x-5=0 \quad\Rightarrow\quad x_{1/2}=\dfrac{4\pm\sqrt{16+20}}{2}$

$\Rightarrow\quad x_1=-1 \quad\wedge\quad x_2=5$

(ii) $0,5x^2-2x-2,5=0 \quad\Rightarrow\quad x_{1/2}=\dfrac{2\pm\sqrt{4+5}}{1} \quad\Rightarrow\quad x_1=-1 \quad\wedge\quad x_2=5$

(iii) $x^4-5x^2+4=0 \xrightarrow{Subst.} u^2-5u+4=0 \quad\Rightarrow\quad u_{1/2}=\dfrac{5\pm\sqrt{25-16}}{2}$

$\Rightarrow\quad u_1=1 \quad\wedge\quad u_2=4 \xrightarrow{\text{ReSubst.}} x_1=-1\wedge x_2=1\wedge x_3=-2\wedge x_4=2$

b) Für welche Werte von k hat die Gleichung keine, eine oder zwei Lösungen?

$$\frac{1}{2}x^2-4x+2k^2=0$$

Lösung:

$$\frac{1}{2}x^2-4x+2k^2=0 \xrightarrow[b^2-4ac]{\text{Diskriminante}} 16-4\cdot\frac{1}{2}\cdot 2k^2=0$$

$$\Rightarrow\quad 16-4k^2=0 \quad\Rightarrow\quad |k|=2$$

eine Lösung:	$k\in\{-2;2\}$
zwei Lösungen:	$\|k\|<2$
keine Lösung:	$\|k\|>2$

4.) Summenzeichen

a) Stellen Sie die Summanden dar: $\sum_{i=0}^{5}(2i-1)^2$

Lösung: $\sum_{i=0}^{5}(2i-1)^2 = 1+1+9+25+49+81$

b) Ermitteln Sie die Grenzen: $\sum\frac{3^i}{2} = 0,5+1,5+4,5+\ldots+29.524,5$

Lösung:

$$\textit{untere Grenze}: \quad \frac{3^i}{2}=\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad 3^i=1 \quad \Rightarrow \quad i=0$$

$$\textit{obere Grenze}: \quad \frac{3^i}{2}=\frac{59.039}{2} \quad \Rightarrow \quad 3^i=59.039 \quad \Rightarrow \quad i=10$$

c) Schreiben Sie die Summen mittels Summenzeichen:

(i) $10+5+\frac{10}{3}+\frac{5}{2}+2+\frac{5}{3}+\frac{10}{7}+\ldots+\frac{10}{111}$

(ii) $2+4+6+8+10+12+\ldots+800$

Lösung:

(i) $10+5+\frac{10}{3}+\frac{5}{2}+2+\frac{5}{3}+\frac{10}{7}+\ldots+\frac{10}{111} = \sum_{i=1}^{111}\frac{10}{i}$

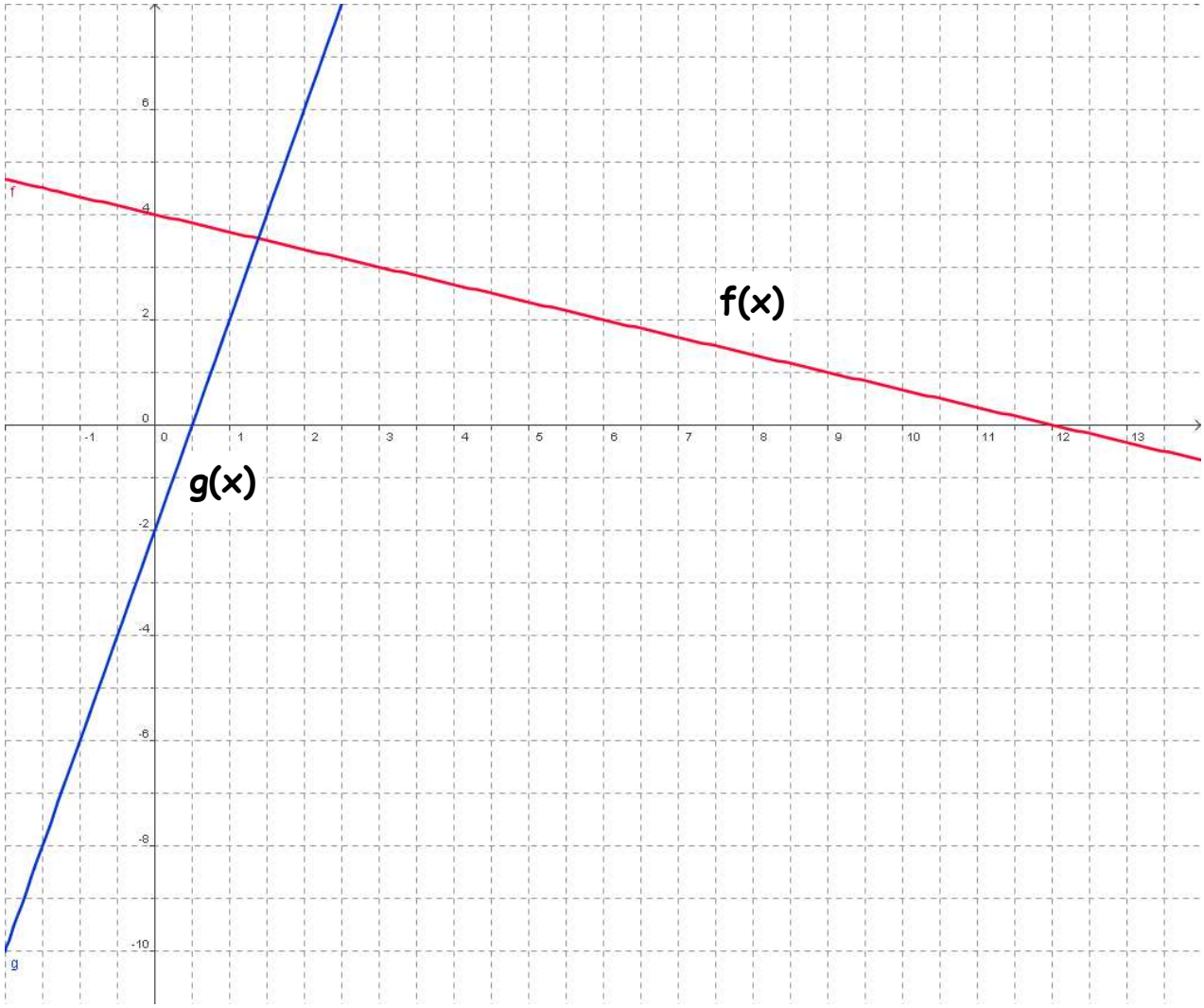
(ii) $2+4+6+8+10+12+\ldots+800 = \sum_{i=1}^{400}2i$

5.) Zeichnen linearer Funktionen

Zeichnen Sie die beiden Geraden in ein Koordinatensystem:

a) $f(x)=-\frac{1}{3}x+4$ b) $g(x)=4x-2$

Lösung:



6.) Geradengleichungen erstellen

Erstellen Sie die Geradengleichung, wenn folgende Angaben vorliegen:

a) f(x) verläuft parallel zur 1. Winkelhalbierenden durch den Punkt $P(1 \mid 2)$

Lösung:

$$P(1 \mid 2) \quad und \quad m = 1 \xrightarrow{f(x)=mx+b} 2 = 1 \cdot 1 + b \quad \Rightarrow \quad b = 1 \quad \Rightarrow \quad f(x) = x + 1$$

b) $P(-4 \mid -1) \quad und \quad Q(2 \mid 3)$

Lösung:

$$P(-4 \mid -1) \quad und \quad Q(2 \mid 3) \xrightarrow{Steigung} m = \frac{3-(-1)}{2-(-4)} = \frac{2}{3}$$

$$\xrightarrow{f(x)=mx+b} 3 = \frac{2}{3} \cdot 2 + b \quad \Rightarrow \quad b = \frac{5}{3} \quad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$$

7.) Die Regentonne

Eine Regentonne ist 90 cm hoch. Sie wird mit einem Schlauch gefüllt, aus dem gleichmäßig Wasser fließt. Nach 4 min. steht das Wasser 44 cm, nach 7 min. 62 cm hoch.

a) Wann ist die Regentonne voll?

Lösung:

$2\ Punkte: \quad P(4 \mid 44) \quad und \quad Q(7 \mid 62)$

$$m = \frac{62-44}{7-4} = \frac{18}{3} = 6$$

$$Geradengleichung: \quad f(x) = mx+b \Rightarrow 44 = 6\cdot 4+b \Rightarrow b = 20$$

$$\text{Füllfunktion}: \quad f(x) = 6x+20$$

$$\Rightarrow 90 = 6x+20 \Rightarrow x = \frac{70}{6}[\min] = 11\frac{2}{3}[\min] = 11[\min]\,40[sek]$$

b) Welchen Wasserstand hatte die Regentonne zu Beginn?

Lösung: $\text{Füllfunktion}: \quad f(x) = 6x+20$

Zu Beginn war die Regentonne mit 20 cm gefüllt; Ansatz: f(0)