Musterlösung **11. Jgst.** **1. Kursarbeit** **Datum: 26.09.2007**

Klasse: GY 07 d **Fach: Mathematik (Kernfach)**

Thema: **Erweitertes Distributivgesetz, Summenzeichen, Lineare Gleichungen und LGS, Quadratische Gleichungen, Funktionen (allgemein) und lineare Funktionen**

1.) Erweitertes Distributivgesetz

Multiplizieren Sie die Klammerterme aus und fassen Sie so weit wie möglich zusammen:

a) $(3a-2)\cdot\left(a^2+1\right)^2$ b) $(-a+5x)\cdot\left(2a^2-\frac{1}{5}x\right)$

Lösung:

$$a)\quad (3a-2)\cdot\left(a^2+1\right)^2=(3a-2)\cdot\left(a^4+2a^2+1\right)$$

$$(3a-2)\cdot\left(a^2+1\right)^2=3a^5-2a^4+6a^3-4a^2+3a-2$$

$$b)\quad (-a+5x)\cdot\left(2a^2-\frac{1}{5}x\right)=-2a^3+10a^2x+\frac{1}{5}ax-x^2$$

2.) Gleichungssysteme

Lösen Sie die Gleichungssysteme nach einem Verfahren Ihrer Wahl:

$$a)\quad \begin{array}{ll} I.) & x-\frac{1}{2}y=1 \\ II.) & 2x+y=14 \end{array} \qquad b)\quad \begin{array}{ll} I.) & \frac{8-x}{3}-15=-2y \\ II.) & \frac{9+y}{8}+23=5x \end{array}$$

Lösung:

$$a)\quad \begin{array}{ll} I.) & x-\frac{1}{2}y=1 \\ II.) & 2x+y=14 \end{array} \xrightarrow{2\cdot I.)+II.)} 4x=16 \xrightarrow{:4} x=4 \Rightarrow y=6$$

$$b) \quad I.) \quad \frac{8-x}{3} - 15 = -2y \xrightarrow{\cdot 3} 8 - x - 45 = -6y \xrightarrow{ordnen} -x + 6y = 37$$

$$II.) \quad \frac{9+y}{8} + 23 = 5x \xrightarrow{\cdot 8} 9 + y + 184 = 40x \xrightarrow{\cdot 3} 40x - y = 193$$

$$\xrightarrow{I.)+6\cdot II.)} 239x = 1.195 \xrightarrow{:239} x = 5 \Rightarrow y = 7$$

3.) (Bi)Quadratische Gleichungen und Lösungsverhalten

Lösen Sie die Gleichungen nach einem Verfahren Ihrer Wahl:

a) $$2x^2 - 2 = 4x^2 + 5x - 9$$

Lösung:

$$2x^2 - 2 = 4x^2 + 5x - 9 \xrightarrow{ordnen} 2x^2 + 5x - 7 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25+56}}{4}$$

$$\Rightarrow x_{1/2} = \frac{-5 \pm 9}{4} \Rightarrow x_1 = -\frac{7}{2} \wedge x_2 = 1$$

b) $$0,5x^2 + 3,5x + 5 = 0$$

Lösung:

$$0,5x^2 + 3,5x + 5 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \frac{-3,5 \pm \sqrt{12,25 - 10}}{1}$$

$$\Rightarrow x_{1/2} = -3,5 \pm 1,5 \Rightarrow x_1 = -5 \wedge x_2 = -2$$

c) $$\begin{aligned} I.) \quad & x \cdot y = 3 \\ II.) \quad & 4x^2 + y^2 = 12 \end{aligned}$$

Lösung:

$$\begin{aligned} &I.) \quad x \cdot y = 3 \\ &II.) \quad 4x^2 + y^2 = 12 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{3}{x} \xrightarrow{\text{einsetzen}} 4x^2 + \left(\frac{3}{x}\right)^2 = 12$$

$$\Rightarrow \quad 4x^2 + \frac{9}{x^2} = 12 \xrightarrow{\cdot x^2} 4x^4 - 12x^2 + 9 = 0 \xrightarrow{\text{Subst.}}$$

$$4u^2 - 12u + 9 = 0 \xrightarrow{\text{Lösung}} u_{1/2} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 144}}{8}$$

$$\Rightarrow \quad u_{1/2} = \frac{3}{2} \xrightarrow{\text{ReSubst.}} x_1 = -\sqrt{\frac{3}{2}} \quad \wedge \quad x_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

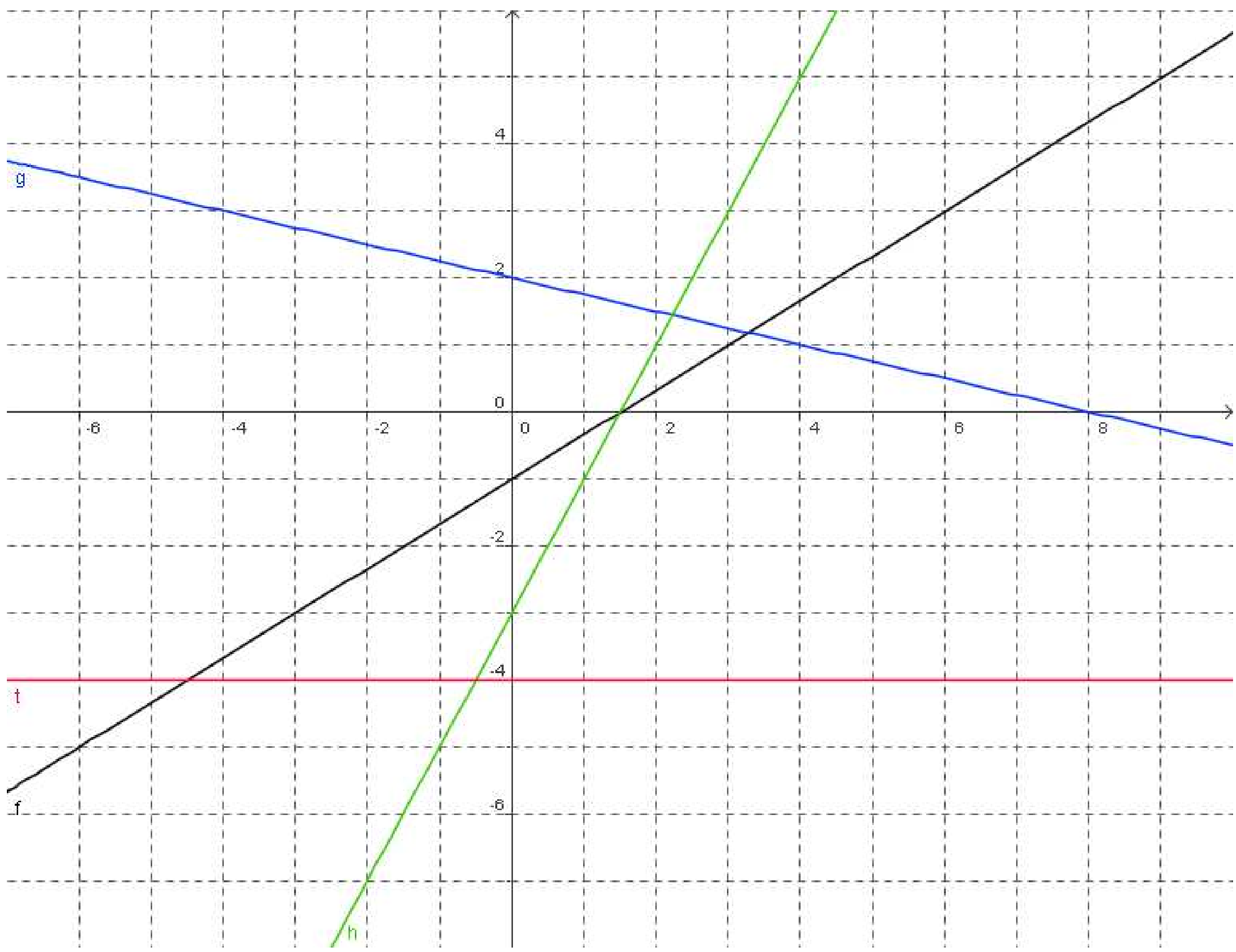
$$\xrightarrow{\text{y-Werte: } y=\frac{3}{x}} y_1 = -\frac{3}{\sqrt{\frac{3}{2}}} = -\sqrt{6} \quad \wedge \quad y_2 = \sqrt{6}$$

4.) Zeichnen Sie folgende lineare Funktionen in ein Koordinatensystem.

a) $f(x) = \frac{2}{3}x - 1$ b) $g(x) = -\frac{1}{4}x + 2$

c) $h(x) = 2x - 3$ d) $t(x) = -4$

Lösung:



5.) Die Punkte P und Q liegen auf der Geraden $f(x) = -\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}$.

Bestimmen Sie die fehlenden Koordinaten.

a) $P(-4 \mid ?)$ b) $P(? \mid -8)$

Lösung:

$$f(-4) = -\frac{3}{5}\cdot(-4)+\frac{4}{5} = \frac{16}{5} = 3{,}2$$

$$-8 = -\frac{3}{5}x+\frac{4}{5} \xrightarrow{-\frac{4}{5}} -\frac{44}{5} = -\frac{3}{5}x \xrightarrow{\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)} x = \frac{44}{3} = 14\frac{2}{3}$$

6.) Erstellen Sie die Geradengleichung:

a) $m=\frac{1}{3}$ *und* $P(-1 \mid -2)$

b) $P(2 \mid -1)$ *und* $Q\left(-1 \,\middle|\, \frac{1}{3}\right)$

c) Die Gerade geht durch den Punkt $P(-1 \mid 3)$ und verläuft **senkrecht** zu $f(x) = 2x-\frac{1}{2}$

Anmerkung: *Zwei Geraden stehen senkrecht zueinander, wenn gilt:*

$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

d) Die Gerade ist eine Ursprungsgerade und verläuft durch den Punkt $P(-2 \mid -3)$

Lösung:

$$a)\quad -2 = \frac{1}{3}\cdot(-1)+b \;\Rightarrow\; b=-\frac{5}{3} \;\Rightarrow\; f(x) = \frac{1}{3}x-\frac{5}{3}$$

$b)$

$$m = \frac{-1-\frac{1}{3}}{2-(-1)} = \frac{-\frac{4}{3}}{3} = -\frac{4}{9}$$

$$-1 = \left(-\frac{4}{9}\right)\cdot 2+b \;\Rightarrow\; b=\frac{1}{9} \;\Rightarrow\; f(x) = -\frac{4}{9}x+\frac{1}{9}$$

$$c)\quad m = -\frac{1}{2} \Rightarrow 3 = \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(-1)+b \Rightarrow b=\frac{5}{2} \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$$

$$d)\quad m = \frac{3}{2} \quad und \quad b = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{3}{2}x$$

7.) Schnittpunktbestimmung

Berechnen Sie den Schnittpunkt zwischen den Geraden

$$f(x) = -\frac{1}{2}x+2 \quad und \quad 3+y = -x$$

<u>Lösung:</u>

$$3+y = -x \xrightarrow[\text{nach } y]{\text{Auflösen}} y = -x-3$$

$$\xrightarrow{\text{Gleichsetzen}} -\frac{1}{2}x+2 = -x-3 \xrightarrow[-2]{+x} \frac{1}{2}x = -5 \Rightarrow x = -10$$

$$\Rightarrow f(10) = \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(-10)+2 = 7 \Rightarrow S(-10 \mid 7)$$

8.) Geraden mit Parameter

Gegeben ist die Geradenschar $f_t(x) = \frac{t}{2}x+2t \quad mit \quad t \in \Re$

a) Welchen Wert müsste **t** annehmen, damit der y-Achsen-abschnitt den Wert 3 besitzt?

b) Welchen Wert müsste **t** annehmen, damit die Steigung m = 2 lautet?

c) Für welchen **t**-Wert verläuft die Gerade parallel zur x-Achse?

d) Für welchen Wert von **t** verläuft die Gerade durch den Punkt $P\left(-2 \,\middle|\, \frac{3}{34}\right)$?

<u>Lösung:</u>

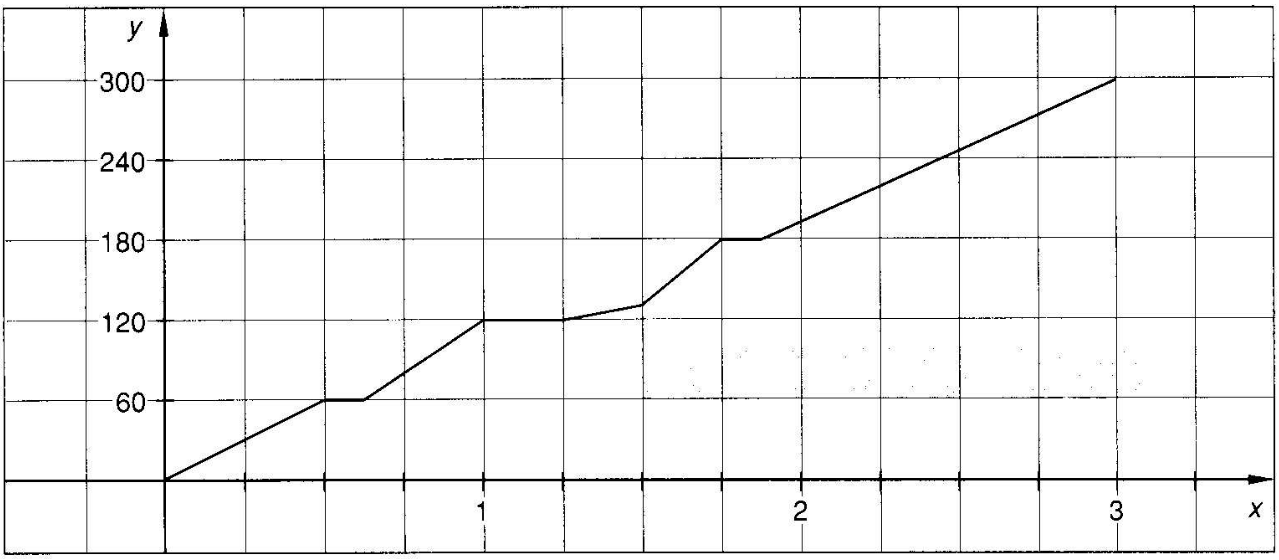
$$a)\quad 2t = 3 \Rightarrow t=\frac{3}{2} \qquad b)\quad \frac{t}{2} = 2 \Rightarrow t=4$$

$$c)\quad m = 0 \Rightarrow \frac{t}{2}=0 \Rightarrow t=0$$

$$d)\quad \frac{3}{34} = \frac{t}{2}\cdot(-2)+2t \Rightarrow \frac{3}{34} = t$$

9.) Der Fahrplan

Der nachfolgende Graph stellt die Fahrt eines Inter-Regios der Deutschen Bahn AG dar, wobei sich die Fahrzeit auf der x-Achse auf Stunden, der Fahrweg auf der y-Achse auf km bezieht. Es wird angenommen, dass der Zug nur an Bahnhöfen hält.



a) An wie vielen Bahnhöfen hält der Zug (mit Start und Ziel!)?

b) Stellen Sie einen Fahrplan für den Zug auf und bezeichnen Sie die Bahnhöfe mit B_1, B_2 usw.
Abfahrtszeitpunkt ist 12.00 Uhr.

<u>Lösung:</u>

a) Es sind insgesamt 5 Bahnhöfe.

b)

Bahnhof	Ankunft	Abfahrt
B_1	---	12.00
B_2	12.30	12.37
B_3	13.00	13.15
B_4	13.45	13.52
B_5	15.00	---

10.) Bergsteiger unter sich

Zwei unterschiedlich geschulte Bergsteigergruppen beschließen einen 3.500 m hohen Berg zu besteigen. Die Gruppen fahren mit einem Lift bergauf. Die besser trainierte Gruppe steigt in 1.000 m Höhe an der Mittelstation aus, die andere Gruppe fährt bis zur Bergstation in 1.600 m Höhe.

Um 10.00 Uhr beginnen beide Gruppen mit ihrem Aufstieg, wobei die gut trainierte Gruppe einen Höhenunterschied von 600 m pro Stunde, die weniger gut trainierte Gruppe einen Höhenunterschied von 400 m pro Stunde bewältigt.

a) Stellen Sie die Funktionsterme der einzelnen Höhen in Abhängigkeit von der Zeit für beide Gruppen auf.

b) Um wie viel Uhr treffen sich die beiden Gruppen?

c) Wann treffen die beiden Gruppen jeweils am Gipfel ein und wie viel Minuten hat die gut trainierte Gruppe Vorsprung vor der anderen Gruppe?

<u>Lösung:</u>

a) $f_{schnell}(x) = 600x + 1.000 \qquad f_{langsam}(x) = 400x + 1.600$

b)

$$f_{schnell}(x) = f_{langsam}(x) \Rightarrow 600x + 1.000 = 400x + 1.600$$

$$\Rightarrow 200x = 600 \Rightarrow x = 3\left[Stunden\right]$$

$$\Rightarrow \text{Zeitpunkt des Treffens der beiden Gruppen: 13.00 Uhr}$$

c) Die gut trainierte Gruppe trifft 35 Minuten vor der anderen Gruppe am Gipfel ein.

$$f_{schnell}(x) = 600x + 1.000 = 3.500 \Rightarrow 600x = 2.500$$

$$\Rightarrow x = 4\frac{1}{6}[Stunden] = 4[Stunden]10[Minuten]$$

$$\Rightarrow Ankunft: \; 14.10\,Uhr$$

$$f_{langsam}(x) = 400x + 1.600 = 3.500 \Rightarrow 400x = 1.900$$

$$\Rightarrow x = 4\frac{3}{4}[Stunden] = 4[Stunden]45[Minuten]$$

$$\Rightarrow Ankunft: \; 14.45\,Uhr$$

11.) Summenzeichen

a) Ermitteln Sie die Summanden: $\sum_{i=3}^{8}\left(10 - \frac{i}{2}\right)$

Lösung:

$$\sum_{i=3}^{8}\left(10 - \frac{i}{2}\right) = \left(10 - \frac{3}{2}\right) + \left(10 - \frac{4}{2}\right) + \left(10 - \frac{5}{2}\right) + \left(10 - \frac{6}{2}\right) + \left(10 - \frac{7}{2}\right) + \left(10 - \frac{8}{2}\right)$$

$$\sum_{i=3}^{8}\left(10 - \frac{i}{2}\right) = 8{,}5 + 8 + 7{,}5 + 7 + 6{,}5 + 6$$

b) Führen Sie eine Indexverschiebung durch: $\sum_{i=4}^{10}(4i - 3) = \sum_{i=?}^{7} ?$

Lösung:

$$\sum_{i=4}^{10}(4i - 3) \overset{-3}{=} \sum_{i=4-3}^{7}\left[4(i+3) - 3\right] = \sum_{i=1}^{7}(4i + 9)$$