Musterlösung **11. Jgst.** **4. Test** **Datum: 24.05.2007**

Klasse: GY 06 a **Fach: Mathematik (Kernfach)**

Thema: **Nicht-rationale Funktionen (insbes. Exponentialfunktionen)**

---

❶ Der Punkt P liegt auf der Exponentialkurve $f(x)=a^x$.
Berechnen Sie die Basis a.

$a)\quad P\left(-2 \,\middle|\, \frac{1}{64}\right) \qquad b)\quad P\left(\frac{1}{4} \,\middle|\, 2\right) \qquad c)\quad P(3 \mid 27)$

Lösung:

$$a)\quad f(-2) = a^{-2} = \frac{1}{64} \Rightarrow \frac{1}{a^2} = \frac{1}{64} \Rightarrow a = 8$$

$$b)\quad f\left(\frac{1}{4}\right) = a^{\frac{1}{4}} = 2 \Rightarrow \sqrt[4]{a} = 2 \xrightarrow{\text{potenziert mit 4}} a = 16$$

$$c)\quad f(3) = a^3 = 27 \xrightarrow{\sqrt[3]{\ }} a = 3$$

❷ Von einer Exponentialfunktion $x \to q^x$ weiß man, dass sie um

a) 15 % wächst, b) 8 % abnimmt,

wenn x um eine Einheit zunimmt.

Bestimmen Sie die Basis q.

Lösung:

$$a)\quad \left(1+\frac{15}{100}\right) = 1{,}15 \qquad b)\quad \left(1-\frac{8}{100}\right) = 0{,}92$$

❸ Die Punkte P und Q liegen auf der Exponentialkurve $f(x)=c\cdot a^x$.
Berechnen Sie den Faktor c und die Basis a.

$a)\quad P(1 \mid 6) \qquad Q(3 \mid 24)$

$b)\quad P(-1 \mid 64) \qquad Q(2 \mid 1)$

Lösung:

a)

$$I)\quad f(1) = ca = 6 \Rightarrow c = \frac{6}{a}$$

$$II)\quad f(3) = ca^3 = 24 \xrightarrow{c\ \text{einsetzen}} \frac{6}{a}\cdot a^3 = 24$$

$$\Rightarrow a = 2 \quad \Rightarrow c = 3 \quad \Rightarrow f(x) = 3\cdot 2^x$$

b)

$$I)\quad f(-1) = ca^{-1} = 64 \Rightarrow \frac{c}{a} = 64 \Rightarrow c = 64a$$

$$II)\quad f(2) = ca^2 = 1 \xrightarrow{c\ \text{einsetzen}} 64\cdot a\cdot a^2 = 1$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow c = 16 \quad \Rightarrow f(x) = 16\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^x$$

❹ **Gleichungen:** Lösen Sie folgende Exponentialgleichungen

a) $3\cdot 2^{3x} - 6 = 18$

Lösung:

$$3\cdot 2^{3x} - 6 = 18 \xrightarrow{+6} 3\cdot 2^{3x} = 24 \xrightarrow{:3} 2^{3x} = 8$$

$$\Rightarrow 2^{3x} = 2^3 \xrightarrow{\text{Exponentenvergleich}} 3x = 3 \xrightarrow{:3} x = 1$$

b) $8^{-2x} + 3 = 35$

Lösung:

$$8^{-2x} + 3 = 35 \xrightarrow{-3} 8^{-2x} = 32 \xrightarrow{\text{Logarithmieren}} (-2x)\cdot\ln 8 = \ln 32$$

$$\xrightarrow{:\ln 8} -2x = \frac{\ln 32}{\ln 8} \xrightarrow{:(-2)} x = \left(-\frac{1}{2}\right)\frac{\ln 32}{\ln 8} = \left(-\frac{5}{6}\right) \approx -0{,}83$$

c) $e^{4x} - e^{2x} - 3 = e^{2x}$

Lösung:

$$e^{4x} - e^{2x} - 3 = e^{2x} \xrightarrow{-e^{2x}} e^{4x} - 2e^{2x} - 3 = 0$$

$$\xrightarrow[u := e^{2x}]{Substitution} u^2 - 2u - 3 = 0$$

$$u_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} \Rightarrow u_1 = 3 \vee u_2 = -1$$

$$\xrightarrow[u := e^{2x}]{\text{Re}\,Substitution} u_1 = e^{2x} = 3 \xrightarrow{\ln} 2x = \ln 3 \xrightarrow{:2} x = \frac{\ln 3}{2} \approx 0,5493$$

$$\xrightarrow[u := e^{2x}]{\text{Re}\,Substitution} u_2 = e^{2x} = -1 \quad \text{keine Lösung, da nicht definiert}$$

❺ Anwendungsaufgabe

Die Indische Bevölkerung betrug 1997 ca. 950 Mio. Menschen.
Man rechnet mit einem jährlichen Wachstum von ca. 2 %.

a) Bestimmen Sie den Funktionsterm der Exponentialfunktion.

b) Wie hoch ist die voraussichtliche Einwohnerzahl im Jahre 2010?

c) Wie viel Einwohner wohnten 1980 in Indien?

d) In welchem Jahr wohnten in Indien etwa 1,1 Mrd. Menschen?

e) Im Internet habe ich die „aktuelle" Bevölkerungszahl nachgeschaut: Indien 1.065.721.000 Einwohner (Stand 2004).

Wie hoch ist nach dieser Anzahl das tatsächliche durchschnittliche jährliche Wachstum?

Lösung:

$$a) \quad f(x) = 950 \cdot 1,02^x \quad [\text{Ergebnis in Mio.}]$$

$$b) \quad f(13) = 950 \cdot 1,02^{13} = 1.228,9263\,[Mio.]$$

$$c) \quad f(-17) = 950 \cdot 1,02^{-17} = 678,4544\,[Mio.]$$

$$d) \quad 950 \cdot 1,02^x = 1.100 \xrightarrow{:950} 1,02^x = \frac{1.100}{950}$$

$$\xrightarrow{\ln} x = \frac{\ln\left(\frac{1.100}{950}\right)}{\ln 1,02} \approx 7,4\,[Jahre] \Rightarrow ca.\ 2004/2005$$

$$e)\quad 950.000.000\cdot q^7 \;=\; 1.065.721.000 \xrightarrow{:950\,[Mio.]} q^7 \;=\; \frac{1.065.721.000}{950.000.000}$$

$$\xrightarrow{\sqrt[7]{\ }} \quad q \;=\; \sqrt[7]{\frac{1.065.721.000}{950.000.000}} \;\approx\; \sqrt[7]{1{,}1218} \;\approx\; 1{,}016556$$

Durchschnittliches jährliches Wachstum: $1{,}6556\,\%$

❻ Beweis und Erklärung

a) Beweisen Sie folgende Behauptung allgemein:

Gegeben sei $f(x)=c\cdot a^x$ Dann gilt: $\dfrac{f(x+h)}{f(x)} \;=\; a^h$

Lösung:

$$\frac{f(x+h)}{f(x)} \overset{einsetzen}{=} \frac{c\cdot a^{x+h}}{c\cdot a^x} \overset{Potenzgesetz}{=} \frac{c\cdot a^x\cdot a^h}{c\cdot a^x} \overset{Kürzen}{=} a^h$$

b) Den Ausdruck kann man verändern zu:

$$f(x+h) \;=\; f(x)\cdot a^h$$

Berechnen Sie anhand des Beispiels $f(x)=3\cdot 2^x$ mit h = 4 und x = 2 die beiden Seiten getrennt voneinander, d.h.

$$f(x+h) \quad und \quad f(x)\cdot a^h$$

jeweils für sich.

Welche Erkenntnis bzw. welchen Zusammenhang kann man daraus folgern?

Lösung:

$$f(x+h) \;=\; 3\cdot 2^{x+h} \xrightarrow{eingesetzt} f(2+4) \;=\; 3\cdot 2^{2+4} \;=\; 3\cdot 2^6 \;=\; 192$$

$$f(x)\cdot a^h \;=\; 3\cdot 2^x\cdot a^h \xrightarrow{eingesetzt} f(2)\cdot 2^4 \;=\; 3\cdot 2^2\cdot 16 \;=\; 192$$

Erklärung: Wird das Argument der Funktion um h erhöht oder vermindert, so ist dies gleichzusetzen mit einer Multiplikation oder Division des Ausgangsfunktionswertes um den Term a^h.