Musterlösung **11. Jgst.** **4. Kursarbeit** **Datum: 26.04.2007**

Klasse: GY 06 a **Fach: Mathematik (Kernfach)**

Gemeinsame Arbeit mit den Themen: **Kurvendiskussion ganzrat. Funktionen; Anwendungen; mathematische Begriffe; Stetigkeit und Differenzierbarkeit**

Aufgabe A:

Untersuchungen an der Funktion zu

$$f(x) = -\frac{1}{2}\left(2x^3 - 12x^2 + 18x - 4\right) \quad mit \quad x \in \Re$$

a) Zeigen Sie, dass x = 2 eine Nullstelle der Funktion $f(x)$ ist und bestimmen Sie gegebenenfalls die weiteren Nullstellen.

Geben Sie **auch den Schnittpunkt mit der y-Achse** an.

Lösung:

=> **y-Achse:** $f(0) = 2$**, also x = 0 => y = 2**

=> **x-Achse:** $f(x) = 0$**, also**

$$-x^3 + 6x^2 - 9x + 2 = 0 \,|\cdot(-1)$$

$$x^3 - 6x^2 + 9x - 2 = 0$$

1. Nullstelle durch probieren (Teiler von 2): **x_1 = 2**

Weitere Nullstellen durch Polynomdivision

$$x^3 - 6x^2 + 9x - 2 = 0 \Rightarrow x^3 - 6x^2 + 9x - 2 = (x-2) \cdot P(x)$$

Also: $$\left(x^3 - 6x^2 + 9x - 2\right) : (x-2) = \left(x^2 - 4x + 1\right)$$

$$x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x_2 = 2 + \sqrt{3} = 3,73 \text{ und } x_3 = 2 - \sqrt{3} = 0,27$$

$$N_1(2|0);\ N_2(3,73|0) \text{ und } N_3(0,27|0)$$

b) Bestimmen Sie die ersten drei Ableitungen von $f(x)$.

Lösung:

$$f'(x) = -3x^2 + 12x - 9$$

$$f''(x) = -6x + 12$$

$$f'''(x) = -6$$

c) Bestimmen Sie Art und Lage der Extrempunkte von $f(x)$.

Lösung:

$$f'(x) = -3x^2+12x-9 \overset{!}{=} 0$$
$$\Rightarrow \quad x^2-4x+3=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=1 \quad \vee \quad x=3$$
$$f''(1) = -6\cdot 1+12 = 6>0 \quad \Rightarrow \quad Min(1\mid -2)$$
$$f''(3) = -6\cdot 3+12 = -6>0 \quad \Rightarrow \quad Max(3\mid 2)$$

d) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an der Stelle x = 2.

Lösung:

$$Tangentenpunkt: \quad P(2\mid 0) \quad [vgl.\ Nullstelle!]$$
$$Steigung: \quad f'(x) = -3x^2+12x-9 \xrightarrow{x=2\ eingesetzt} f'(2) = 3$$
$$y-Achsenabschnitt: \quad t(x) = mx+b \xrightarrow{x=2\ eingesetzt} 0 = 3\cdot 2+b \quad \Rightarrow \quad b=-6$$

$$Tangente: \quad t(x) = 3x-6$$

e) Untersuchen Sie die Funktion $f(x)$ auf Wendepunkte.

Lösung:

$$f''(x) = -6x+12 \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x=2$$
$$f'''(2) = -6 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad W(2\mid 0)$$

f) Beschreiben Sie das Verhalten der Funktion für $x \to \pm\infty$

Lösung:

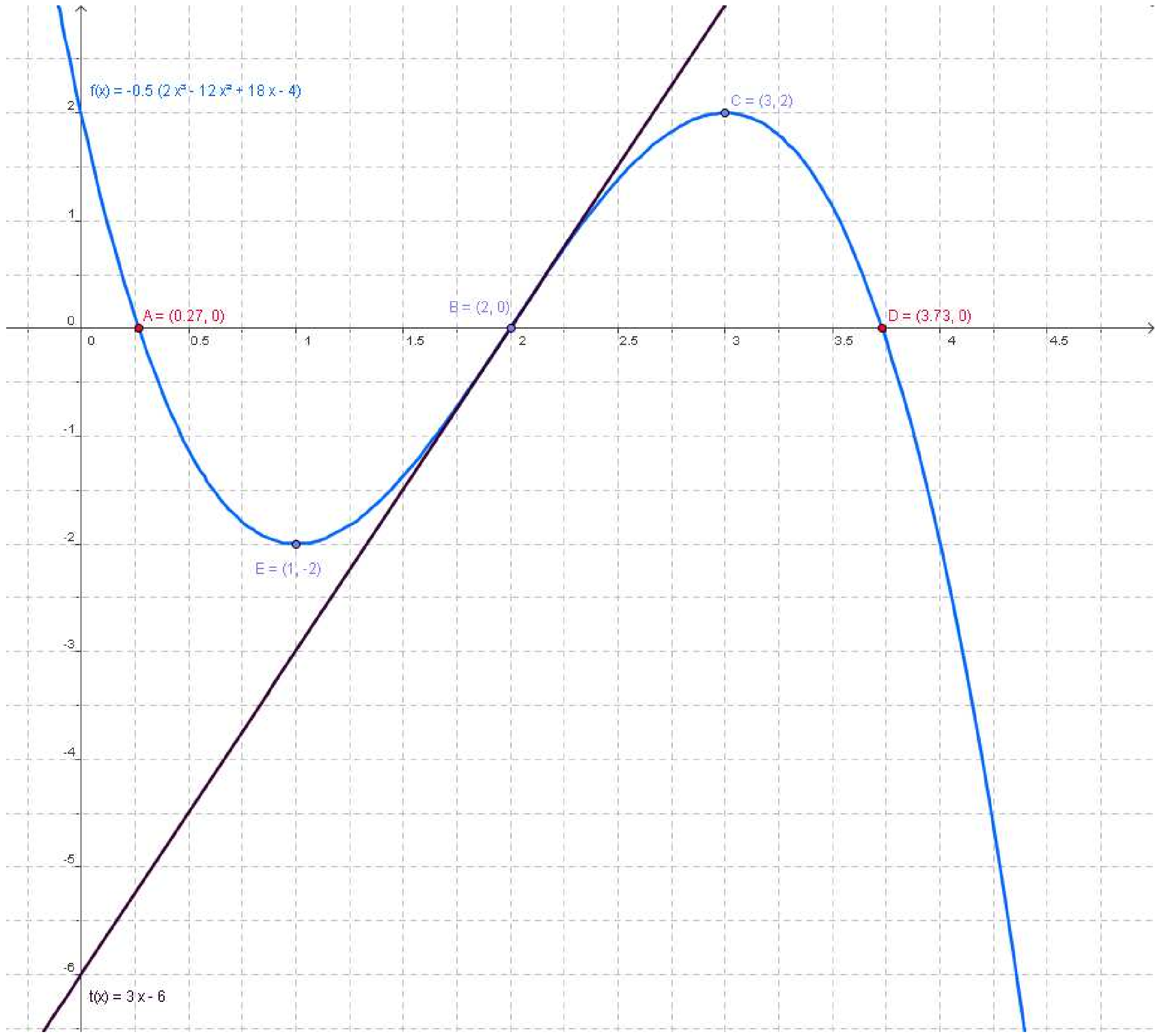
Betrachtung des Glieds mit der höchsten Potenz:

$-x^3$ hat einen ungeraden Exponenten und ein negatives Vorzeichen.

Also gilt: $x \to \infty: f(x) \to -\infty$ und $x \to -\infty: f(x) \to \infty$

g) Skizzieren Sie den Graphen von $f(x)$ und die Tangente in eine Koordinatenebene mit 2 cm für 1 Einheit und $-1 \leq x \leq +5$ und $-7 \leq y \leq +3$

Lösung:



Aufgabe B (Teil 1):

Ein Gebirgsmassiv hat die in der Zeichnung angedeutete Gestalt.
Der Gipfel liegt bei G, das Plateau bei P (10/0,85).

Zu Füßen des Massivs liegt bei B (13/0) ein Dorf.

Die Zahlenangaben sind in km zu verstehen, z.B. bedeutet P (10/0,85), dass das Plateau vom Ursprung O (0/0) in waagrechter Richtung 10km entfernt auf 850m Höhe liegt.

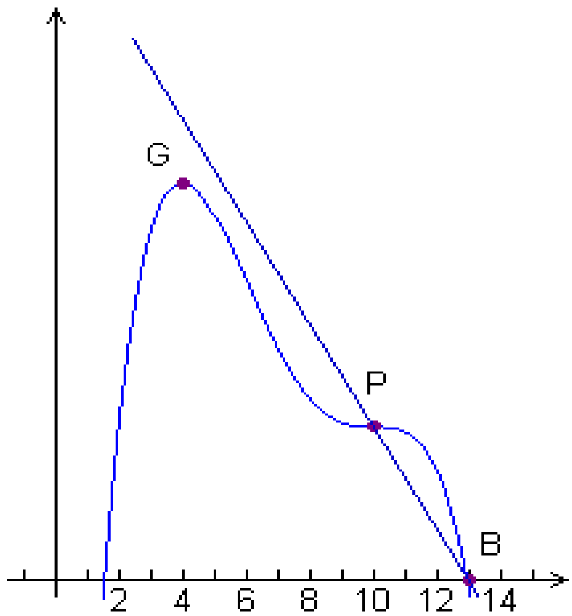
Vom Dorf B führt ein Tunnel in gerader Linie zum Plateau P;
in dem Tunnel bringt eine Zahnradbahn Touristen von B nach P und zurück.

Die Gebirgskontur wird näherungsweise durch den Graph der Funktion f mit dem Funktionsterm

$$f(x) = -\frac{1}{320}x^4 + \frac{1}{10}x^3 - \frac{9}{8}x^2 + 5x - \frac{27}{5}$$

$$mit \quad x \in \Re$$

beschrieben.



a) Wie hoch ist der Gipfel?

Lösung:

$$f(4) = 2{,}2 \quad \Rightarrow \quad 2.200\,[m]$$

b) Welche Steigung hat die Gerade $g = \overline{BP}$ absolut und in Prozent?

Lösung:

$$P(10 \mid 0{,}85) \quad und \quad B(13 \mid 0)$$

$$m_{\overline{BP}} = \frac{0-0{,}85}{13-10} = \frac{-0{,}85}{3} = \frac{-850\,[m]}{3.000\,[m]} \approx -0{,}2833 \approx (-)\,28{,}33\,[\%]$$

c) Wie lange dauert eine Bergfahrt in Minuten bei einer Durchschnitts- geschwindigkeit der Zahnradbahn von $\overline{v} = 25\frac{\text{km}}{\text{h}}$?

Lösung:

$$Entfernung\ \overline{BP}: \quad P(10 \mid 0{,}85) \quad und \quad B(13 \mid 0)$$

$$e_{\overline{BP}} = \sqrt{(0-0{,}85)^2 + (13-10)^2} = \sqrt{9{,}7225} \approx 3{,}118\,[km]$$

$$Zeit: \quad t = \frac{3{,}118\,[km]}{25\left[\frac{km}{h}\right]} \approx 0{,}1247\,[h] \xrightarrow{\cdot 60} 7{,}48\,[\min] \approx 7\,[\min]\,29\,[sek]$$

d) Ein Extrembergsteiger will die Strecke vom Plateau P auf den Gipfel G auf kürzestem Weg (in der Direttissima) erklimmen.
In welchem Punkt am Berg hat sein Weg die größte Steigung?

<u>Hinweis:</u>

Als Direttissima (italienisch für ‚kürzeste Verbindung') wird im Alpinismus ein direkter, umwegloser Aufstieg zum Gipfel bezeichnet, an der Falllinie vom Gipfel zum Boden ausgerichtet.

<u>Lösung:</u>

Im Wendepunkt hat die Berg die größte Steigung.

Beweis:

$$f'(x) = -\frac{1}{80}x^3 + \frac{3}{10}x^2 - \frac{9}{4}x + 5$$

$$f''(x) = -\frac{3}{80}x^2 + \frac{3}{5}x - \frac{9}{4} \overset{!}{=} 0 \Rightarrow x_1 = 6 \vee x_2 = 10$$

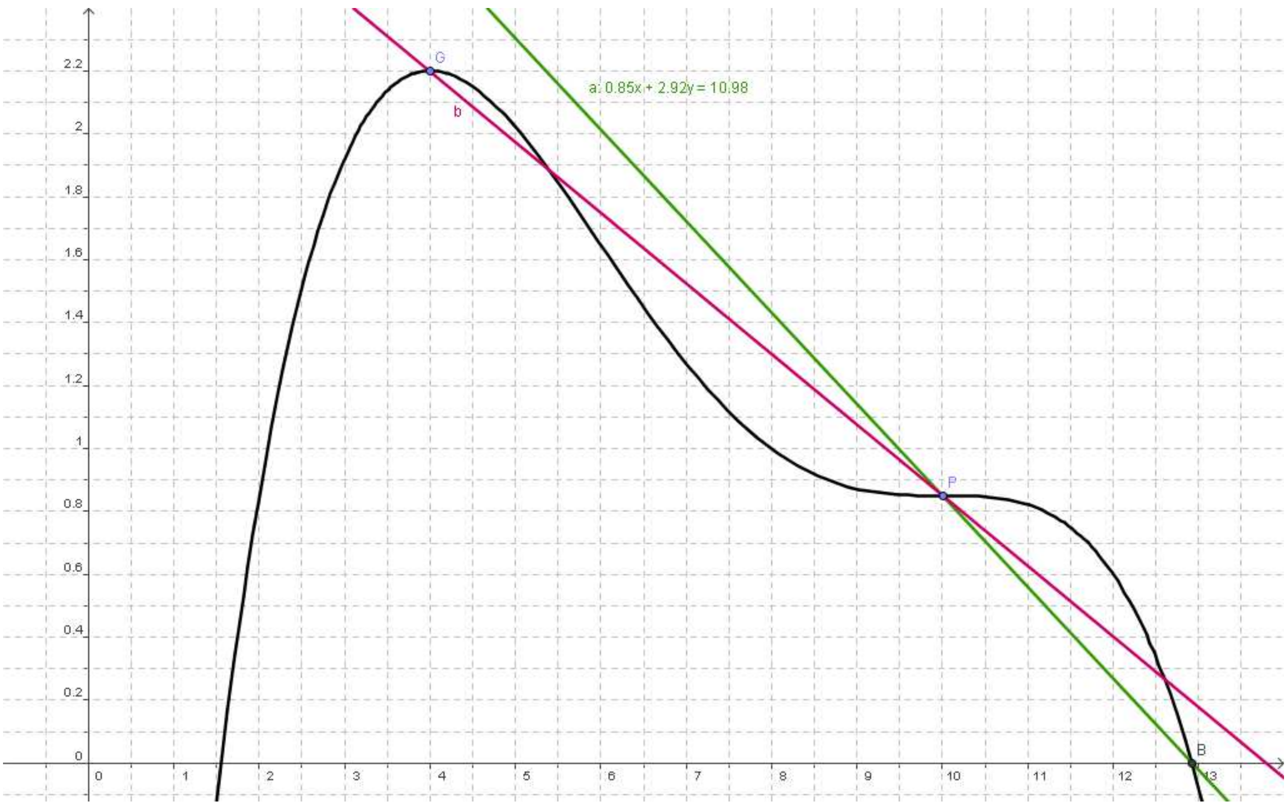
Wo ist die Steigung maximal?

Zur Lösung müssen die x-Werte in die dritte Ableitung der Funktion eingesetzt werden.

$$f'''(x) = -\frac{3}{40}x + \frac{3}{5}$$

$$f'''(6) = -\frac{3}{40}\cdot 6 + \frac{3}{5} = \frac{3}{20} = 0{,}15 \Rightarrow W_1(6 \mid 1{,}65) \xrightarrow[\text{in } f'(x)]{x=6} m_{W_1} = -0{,}4$$

$$f'''(10) = -\frac{3}{40}\cdot 10 + \frac{3}{5} = -\frac{3}{20} = -0{,}15 \Rightarrow W_2(10 \mid 0{,}85) \Rightarrow \textit{Sattelpunkt}$$



Aufgabe B (Teil 2):

Gegeben ist die auf einem Intervall I definierte Funktion f und $x_0 \in I$.
Ergänzen Sie durch sinnvolle Einträge!

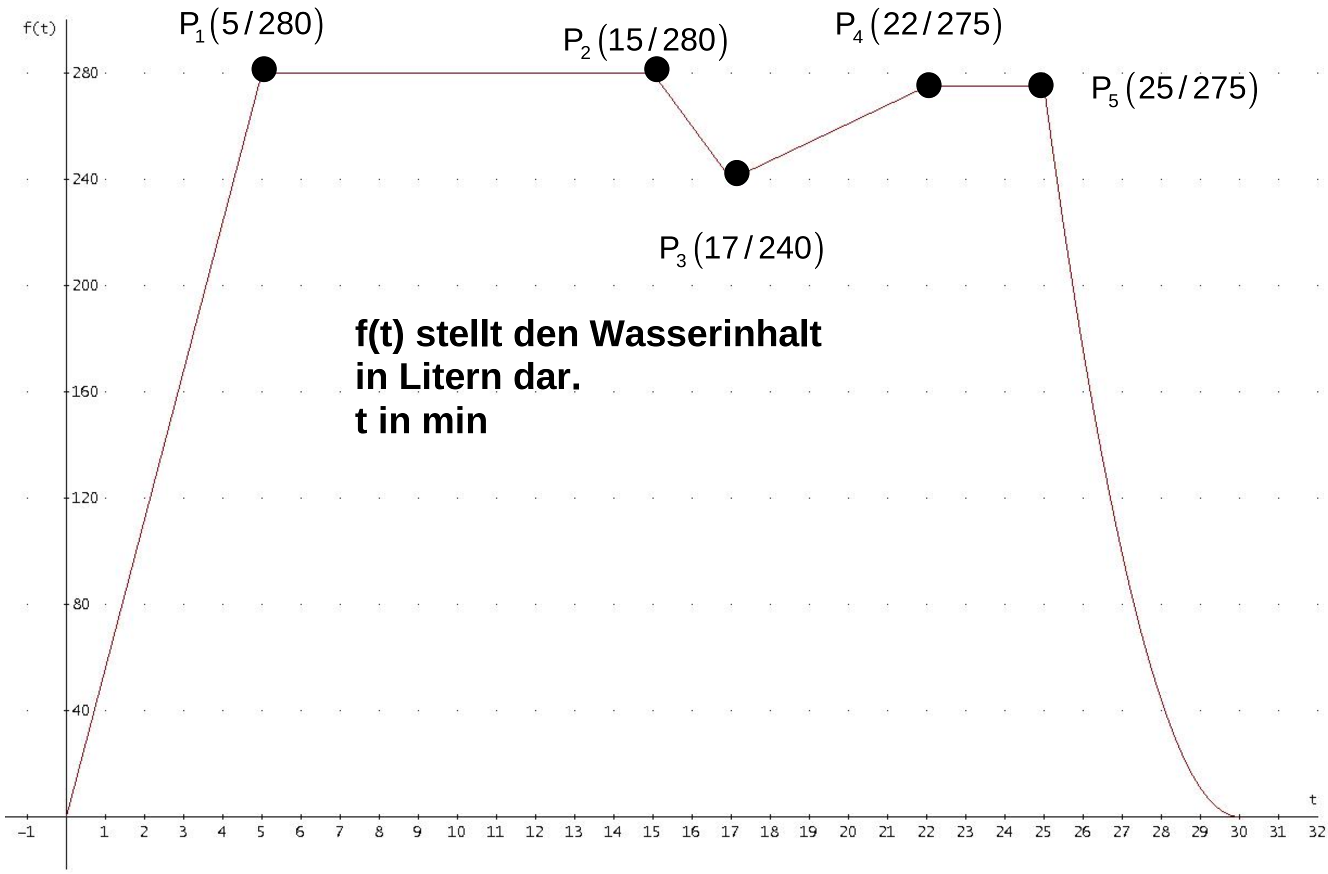
Unter der Ableitung $f'(x_0)$ versteht man den Grenzwert des ____________________.   Wenn $f'(x)>0$ für alle $x \in I$, dann ist f ________________________________ auf I   Eine ganzrationale Funktion n-ten-Grades hat maximal _______________ Wendestellen.   Die Potenzregel der Differentiation lautet:_________________________________   Die notwendige Bedingung für (innere) Extremstellen lautet: ___________________   Gilt $f'(x_0)=0$, dann hat der Graph von f im Punkt $P(x_0/f(x_0))$ eine ________________ Tangente.   Ein Wendepunkt mit waagrechter Tangente nennt man _________________________.   Wenn x_0 eine Wendestelle von f ist, dann gilt ____________________________.   Ändert der Graph einer Funktion in einem Punkt sein Krümmungsverhalten, so nennt man diesen Punkt ______________________________.

Lösung:

Unter der Ableitung $f'(x_0)$ versteht man den Grenzwert des ***_Differenzenquotienten_***.   Wenn $f'(x)>0$ für alle $x \in I$, dann ist f ***_streng monoton steigend_*** auf I   Eine ganzrationale Funktion n-ten-Grades hat maximal **_n-2_** Wendestellen.   Die Potenzregel der Differentiation lautet:**_$f'(x) = n * x^{(n-1)}$ _**   Die notwendige Bedingung für (innere) Extremstellen lautet: **_ $f'(x) = 0$ _**   Gilt $f'(x_0)=0$, dann hat der Graph von f im Punkt $P(x_0/f(x_0))$ eine **_waagrechte / horizontale_** Tangente.   Ein Wendepunkt mit waagrechter Tangente nennt man **_Terrassenpunkt / Sattelpunkt_**.   Wenn x_0 eine Wendestelle von f ist, dann gilt **_ $f''(x) = 0$_**.   Ändert der Graph einer Funktion in einem Punkt sein Krümmungsverhalten, so nennt man diesen Punkt **_Wendepunkt_**.

Aufgabe C: Die Badewanne

Gustav Knödel freut sich jedes Wochenende auf sein Vollbad. Er hat sich eine spezielle quaderförmige Badewanne mit den Grundflächenmaßen 1,40 m Länge und 50 cm Breite bauen lassen. Das nachstehende Schaubild beschreibt den Wasserinhalt seiner Badewanne während eines Vollbades.



1.) Beschreiben Sie den Vorgang in Worten. Gehen Sie dabei auch auf Besonderheiten ein.

Lösung:

Innerhalb von 5 Minuten wird die Badewanne mit gleichmäßiger Wassermenge pro Minute gefüllt ($m = \frac{280}{5} = 56$) bis die Menge 280 Liter erreicht ist. Dann badet Gustav 10 Minuten, ohne dass die Wassermenge verändert wird.
Da das Wasser etwas abgekühlt ist, lässt Gustav innerhalb von 2 Minuten 40 Liter ab ($m = -\frac{40}{2} = -20$) und füllt 35 Liter heißeres Wasser in Zeitraum von 5 Minuten ($m = \frac{35}{5} = 7$) hinzu.

Er verharrt noch 3 Minuten im Bad, danach steigt er aus der Wanne und lässt das Wasser ablaufen.

Es dauert ca. 5 Minuten bis die Wann vollständig geleert ist, wobei zu Beginn das Wasser schneller abläuft als gegen Ende.

2.) Welche Wassermenge wurde insgesamt für das Vollbad verwendet?

Lösung:

erster Einfüllvorgang:	280
zweiter Einfüllvorgang:	35
insgesamt:	315

3.) Wie viel Liter Wasser pro Minute strömten während des ersten Einfüllens in die Wanne?

Lösung:

$$m = \frac{280\left[Liter\right]}{5\left[Minuten\right]} = 56\frac{\left[Liter\right]}{\left[Minuten\right]}$$

4.) Geben Sie den funktionalen Zusammenhang (abschnittweise definierte Funktion) für den Wasserinhalt in Abhängigkeit der Zeit t für das Intervall $t \in \left[0;17\right]$ an.

Lösung:

$$f\left(t\right) = \begin{cases} 56t & 0 \le t \le 5 \\ 280 & 5 < t \le 15 \\ -20t + 580 & 15 < t \le 17 \end{cases}$$

5.) An der Stelle **t** = 5 ist die Funktion nicht differenzierbar. An welchen Stellen der Funktion f(t) ist dies noch der Fall? (Keine Rechnung erforderlich!)

Lösung:

Es gilt:

$$linksseitig: \lim_{h \to 0} \frac{f\left(t-h\right) - f\left(t\right)}{-h} = \lim_{h \to 0} \frac{56\left(t-h\right) - 56t}{-h} = \lim_{h \to 0} \frac{-56h}{-h} = 56$$

$$rechtsseitig: \lim_{h \to 0} \frac{280-280}{h} = 0$$

Im weiteren ist dies an allen „Knickstellen" der Fall:

P_2 (15 / 280) P_3 (17 / 240) P_4 (22 / 275) P_5 (25 / 275)

Aufgabe D (Teil 1):

Gegeben sei folgende abschnittweise definierte Funktion:

$$f_a(x) = \begin{cases} -2x + a & \text{für } x \geq 1 \\ -x^2 + 1 & \text{für } x < 1 \end{cases}$$

a) Für welchen Wert von $x \in \Re$ ist $f_a(x)$ an der Stelle x = 1 stetig?

Lösung:

Von rechts: x = 1 + h $\quad \lim\limits_{h \to 0}(-2(1+h)+a) = -2 + a$

Von links: x = 1 - h $\quad \lim\limits_{h \to 0}(-(1-h)^2 + 1) = 0$

f ist also stetig für a = 2, denn dann stimmen die Grenzwerte von rechts und von links überein.

b) Überprüfen Sie $f_2(x)$ auf Differenzierbarkeit an der Stelle x = 1!

HINWEIS:
Die Untersuchungen auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit sollte natürlich mit der Limesschreibweise (Differenzialquotient) und der Koordinatendifferenz h.

Lösung:

Von rechts: x = 1 + h $\quad \lim\limits_{h \to 0} \frac{(-2 \cdot (1+h) + 2) - 0}{1 + h - 1} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{-2h}{h} = -2$

Von links: x = 1 - h $\quad \lim\limits_{h \to 0} \frac{(-(1-h)^2 + 1) - 0}{1 - h - 1} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{2h - h^2}{-h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{h(2-h)}{-h} = -2$

Die Funktion ist an der Stelle x = 1 differenzierbar.

Aufgabe D (Teil 2):

Die Funktion

$$a(t) = \begin{cases} -4{,}5t^3 + 58{,}5t^2 - 354t + 1000 & \text{für } t < 3 \\ 343 - \frac{343}{3} \cdot (t - 3) & \text{für } t \geq 3 \end{cases}$$

beschreibt näherungsweise den Restwert eines Anlagegutes mit einem Anschaffungswert von 1.000,00 €.

a) Zeigen Sie:
   (i) Der Anschaffungswert, also der Wert zum Zeitpunkt **t** = 0, beträgt 1.000,00 €.

(ii) Die Nutzungsdauer – das heißt, die Zeit, bis das Anlagegut vollständig abgeschrieben ist – beträgt 6 Jahre.

Lösung:

a(0) = 1000,00 [€] liefert den Anschaffungswert.

a(x) = 0 liefert x = 6 und damit die Nutzungsdauer (oder f(6) = 0).

b) (i) Berechnen Sie den Restwert nach dem 1. Jahr.

(ii) Ermitteln Sie daraus den Abschreibungssatz, der bei der degressiven Abschreibung zugrunde gelegt wurde.

Lösung:

a(1) = 700,00 [€] liefert den Restwert nach einem Jahr – es wurde also ein Betrag von 300,00 € abgeschrieben. Das entspricht einem degressiven Abschreibungssatz von 30%

c) Bestätigen Sie diesen Abschreibungssatz durch den Restwert nach dem 2. Jahr.

Lösung:

Option 1: a(2) = 490 [€] liefert den Restwert nach zwei Jahren

Option 2: 700,00 – (30% von 700,00) = 700,00 – 210,00 = 490,00

d) Bestätigen Sie, dass der Übergang von der degressiven zur linearen Abschreibung **nahtlos** gelingt!

Erläutern bzw. interpretieren Sie den Sachverhalt des „nahtlosen Übergangs" (i) aus mathematischer und (ii) aus betriebswirtschaftlicher Sicht.

Lösung:

Von rechts: x = 3 + h: $\lim\limits_{h\to 0}(343 - \frac{343}{3}(3+h-3)) = 343$

Von links: x = 3 – h: $\lim\limits_{h\to 0}(-4{,}5\cdot(3-h)^3 + 58{,}5\cdot(3-h)^2 - 354\cdot(3-h)+1000) = 343$

Mathematisch: Es gibt einen stetigen Übergang zwischen der degressiven und der linearen Abschreibungsfunktion.

Betriebswirtschaftlich: Im Jahr des Übergangs von de linearen zur degressiven Abschreibung sind beiden AfA-Beträge identisch; d.h. es gibt keinen „Betragssprung".