Musterlösung **11. Jgst.** **3. Kursarbeit** **Datum: 01.03.2007**

Klasse: GY 06 a **Fach: Mathematik (Kernfach)**

Thema: **Wurzelfunktionen; Stetigkeit; Diff.-barkeit & Diff.-Quotient; Ableitungen; Umkehrfunktionen**

---

❶ Wurzelfunktionen

Gegeben sei folgende Wurzelfunktion: $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x}$

Ermitteln Sie zu der gegebenen Funktion folgende Größen:

a) den Definitionsbereich,
b) die Nullstellen und die
c) Schnittstelle mit der y-Achse

Lösung:

$$Definitionsbereich: \quad x^2 - 4x \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x(x-4) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \leq 0 \quad \vee \quad x \geq 4$$

$$Nullstellen: \quad x^2 - 4x = 0 \quad \Rightarrow \quad x(x-4) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0 \quad \vee \quad x_2 = 4$$

$$Schnittpunkt\ mit\ y-Achse: \quad f(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad S_y(0 \mid 0)$$

❷ Schnittpunkte bei Wurzelfunktionen

Gegeben seien die beiden Funktionen $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ und

$g_t(x) = \sqrt{-t + 2x}$.

a) Für welchen Wert des Parameters **t** haben die beiden Funktionen bei x = 4 einen Schnittpunkt?

b) Prüfen Sie, ob es für diesen **t** -Wert noch eine zweite Schnittstelle gibt.

c) Ermitteln Sie gegebenenfalls auch noch die jeweiligen y-Werte.

Lösung:

$$a) \quad f(x) = g_t(x)$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{25 - x^2} = \sqrt{-t + 2x} \quad \xrightarrow{Quadrieren} \quad 25 - x^2 = -t + 2x$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + 2x - 25 - t = 0$$

$$\Rightarrow \quad x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(-25 - t)}}{2} \quad \Rightarrow \quad x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{104 + 4t}}{2} \overset{!}{=} 4$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{104 + 4t} = 10 \quad \xrightarrow{Quadrieren} \quad 104 + 4t = 100 \quad \Rightarrow \quad t = -1$$

$b)\qquad t=-1$

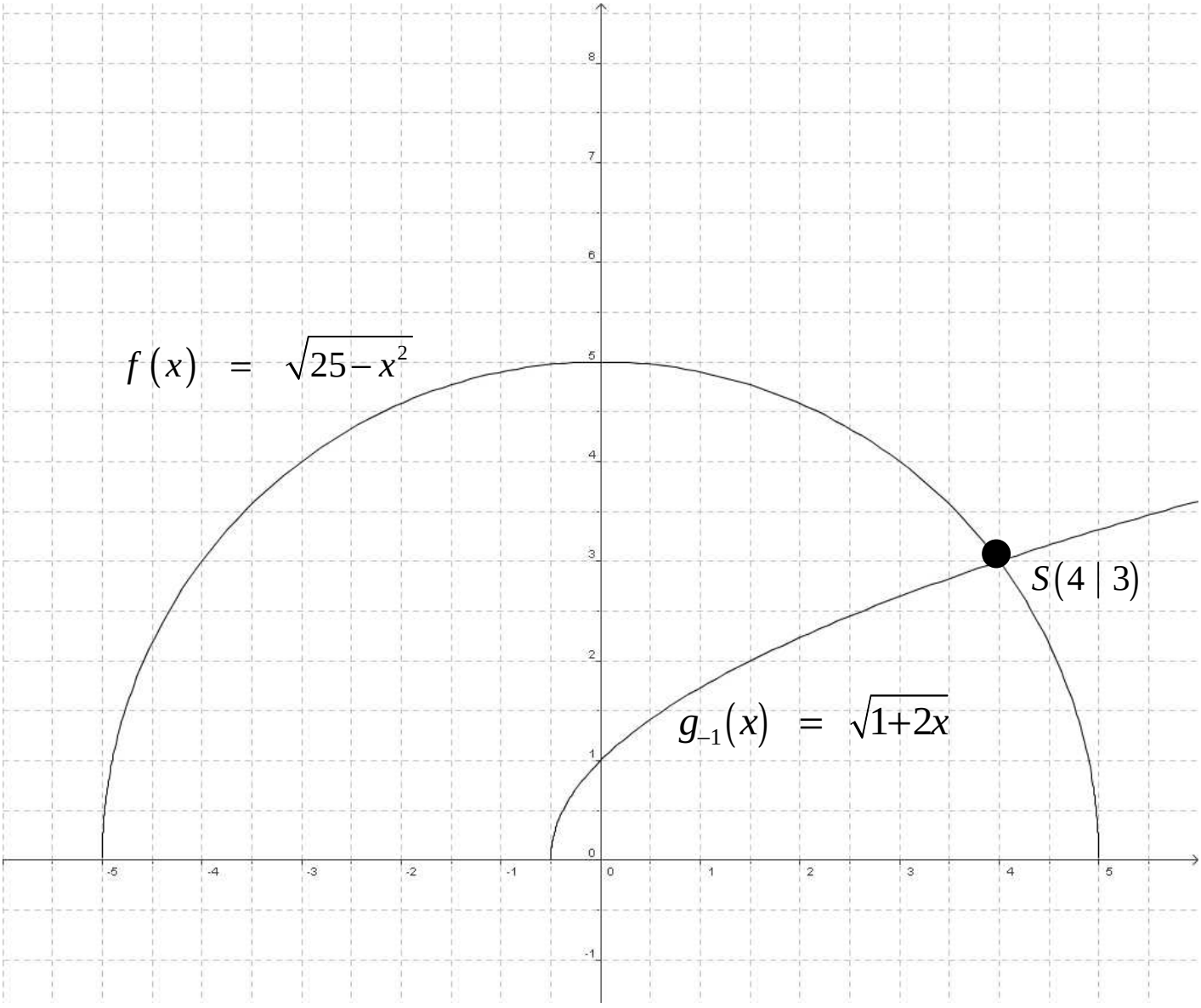
$$\Rightarrow\quad x_{1/2}\;=\;\frac{-2\pm\sqrt{104+4t}}{2}\quad\Rightarrow\quad x_{1/2}\;=\;\frac{-2\pm 10}{2}$$

$$\Rightarrow\quad x_1\;=\;4\;\vee\;x_2\;=\;-6$$

Achtung: Für x_2 sind die Funktionen nicht definiert!

Aufgrund des Quadrierens wurden die Lösungen erweitert, widersprechen allerdings der Definitionsmenge!

$c)\qquad f(4)=\sqrt{25-16}=\sqrt{9}=3\quad\Rightarrow\quad S(4\mid 3)$



❸ Stetigkeit

a) Prüfen Sie die Funktion auf Stetigkeit:

$$f(x) = \begin{cases} x^3+2x^2-3 & x \le -1 \\ 2x^5+4 & x > -1 \end{cases}$$

Lösung:

$$f(x) = \begin{cases} x^3+2x^2-3 & x \le -1 \\ 2x^5+4 & x > -1 \end{cases}$$

$$\textit{linke Seite}: \lim_{\substack{x \to -1-h \\ h \to 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to -1-h \\ h \to 0}} \left(x^3+2x^2-3\right) = \lim_{h \to 0}\left[(-1-h)^3+2(-1-h)^2-3\right] = -2$$

$$\textit{rechte Seite}: \lim_{\substack{x \to -1+h \\ h \to 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to -1+h \\ h \to 0}} \left(2x^5+4\right) = \lim_{h \to 0}\left[2(-1+h)^5+4\right] = 2$$

$f(x)$ *ist nicht stetig.*

b) Bestimmen Sie die Werte der Parameter **t und s** so, dass die Funktion stetig ist.

$$g_{s,t}(x) = \begin{cases} 2x-1 & x > 2 \\ t+1 & x = 2 \\ -\dfrac{1}{x^2}+s & x < 2 \end{cases}$$

Lösung:

$$\textit{rechte Seite}: \lim_{\substack{x \to 2+h \\ h \to 0}} g(x) = \lim_{\substack{x \to 2+h \\ h \to 0}} (2x-1) = \lim_{h \to 0}\left[2(2+h)-1\right] = 3$$

$$\textit{Punkt bei } x=2: \quad t+1 \overset{!}{=} 3 \quad \Rightarrow \quad t = 2$$

$$\textit{linke Seite}: \lim_{\substack{x \to 2-h \\ h \to 0}} g(x) = \lim_{\substack{x \to 2-h \\ h \to 0}} \left(-\frac{1}{x^2}+s\right) = \lim_{h \to 0}\left[-\frac{1}{(2-h)^2}+s\right] = -\frac{1}{4}+s$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{4}+s \overset{!}{=} 3 \quad \Rightarrow \quad s = \frac{13}{4} = 3\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \quad g_{s,t}(x) \text{ ist für t = 2 und s = } \frac{13}{4} \text{ stetig.}$$

c) Erklären Sie mathematisch den Begriff Stetigkeit.

Lösung: Stetigkeit in $x_0 \in [a\,;b]$ liegt vor, wenn gilt:

(i) $\lim\limits_{h \to 0} f(x_0 + h) = \lim\limits_{h \to 0} f(x_0 - h) = f(x_0)$ und

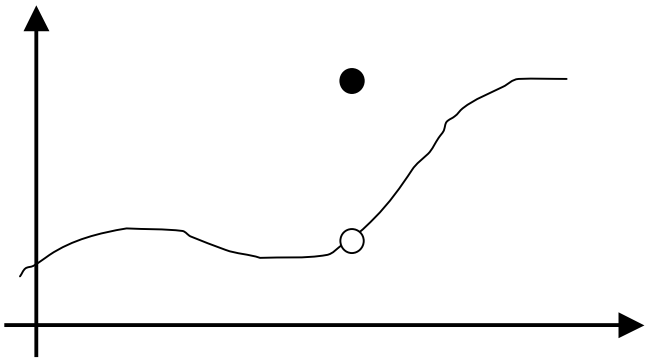
(ii) $f(x_0)\ existiert$

d) Geben Sie zeichnerisch zwei verschiedene Situationen an, in denen jeweils eine Bedingung der Stetigkeit verletzt wird.

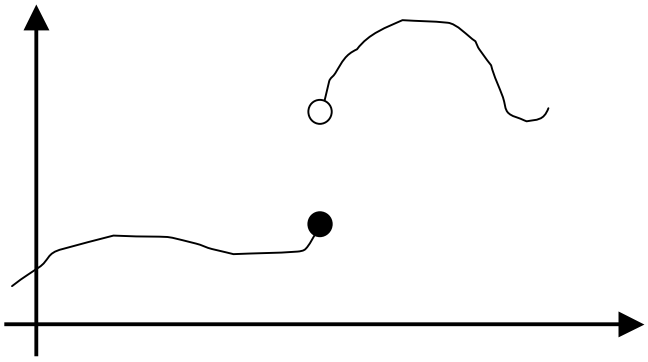
Begründen Sie in diesem Zusammenhang dann auch die jeweilige Unstetigkeit.

Lösung:

Situation 1: links- und rechtseitiger Grenzwert sind identisch, aber der Funktionswert stimmt nicht mit den Grenzwerten überein.



Situation 2: links- und rechtseitiger Grenzwert sind nicht identisch.



❹ Differenzierbarkeit

a) Beweisen Sie die Ableitung folgender Funktionen mit Hilfe der h-Methode:

(i) $f(x) = 4x^2 - x$ (ii) $g(x) = c \cdot f(x)$

Lösung:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{4(x+h)^2-(x+h)-(4x^2-x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{4x^2+8hx+4h^2-x-h-4x^2+x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h(8x+4h-1)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}(8x+4h-1) = 8x-1$$

$$g'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{c\cdot f(x+h)-c\cdot f(x)}{h}$$

$$g'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{c\cdot\left[f(x+h)-f(x)\right]}{h} = c\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$g'(x) = c\cdot f'(x)$$

b) Bilden Sie die erste Ableitung folgender Funktionen:

(i) $f(x) = \frac{1}{4}x^8 + 2x^3$ (ii) $g_k(x) = \frac{k}{x^{2k-1}}$

(iii) $h_k(x) = 2x^{3k}$ (iv) $t(x) = \sqrt{x} - 3$

(v) $k(x) = x^2 - \frac{1}{x}$ (vi) $u(x) = \frac{2}{x^4}$

(vii) $f_x(a) = \frac{1}{4}x^8 \cdot a^2$

Lösung:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^8 + 2x^3 \xrightarrow{\text{Ableitung}} f'(x) = 2x^7 + 6x^2$$

$$g_k(x) = \frac{k}{x^{2k-1}} = kx^{-2k+1} \xrightarrow{\text{Ableitung}} g_k'(x) = k(-2k+1)x^{-2k} = \frac{-2k^2+k}{x^{2k}}$$

$$h_k(x) = 2x^{3k} \xrightarrow{\text{Ableitung}} h_k'(x) = 6kx^{3k-1}$$

$$t(x) = \sqrt{x} - 3 = x^{\frac{1}{2}} - 3 \xrightarrow{\text{Ableitung}} t'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}$$

$$k(x) = x^2 - \frac{1}{x} = x^2 - x^{-1} \xrightarrow{\text{Ableitung}} k'(x) = 2x + x^{-2} = 2x + \frac{1}{x^2}$$

$$u(x) = \frac{2}{x^4} = 2x^{-4} \xrightarrow{\text{Ableitung}} u'(x) = (-8)x^{-5} = -\frac{8}{x^5}$$

$$f_x(a) = \frac{1}{4}x^8 \cdot a^2 \xrightarrow{\text{Ableitung}} f_x'(a) = \frac{1}{2}x^8 \cdot a$$

❺ **Analyse zur Differenzierbarkeit**

Gegeben sei die Funktion $f(x) = x \cdot |x-2|$

a) Zeichnen Sie die Funktion im Bereich $x \in [-1;3]$

b) Schreiben Sie die Funktion ohne Betragsstriche.

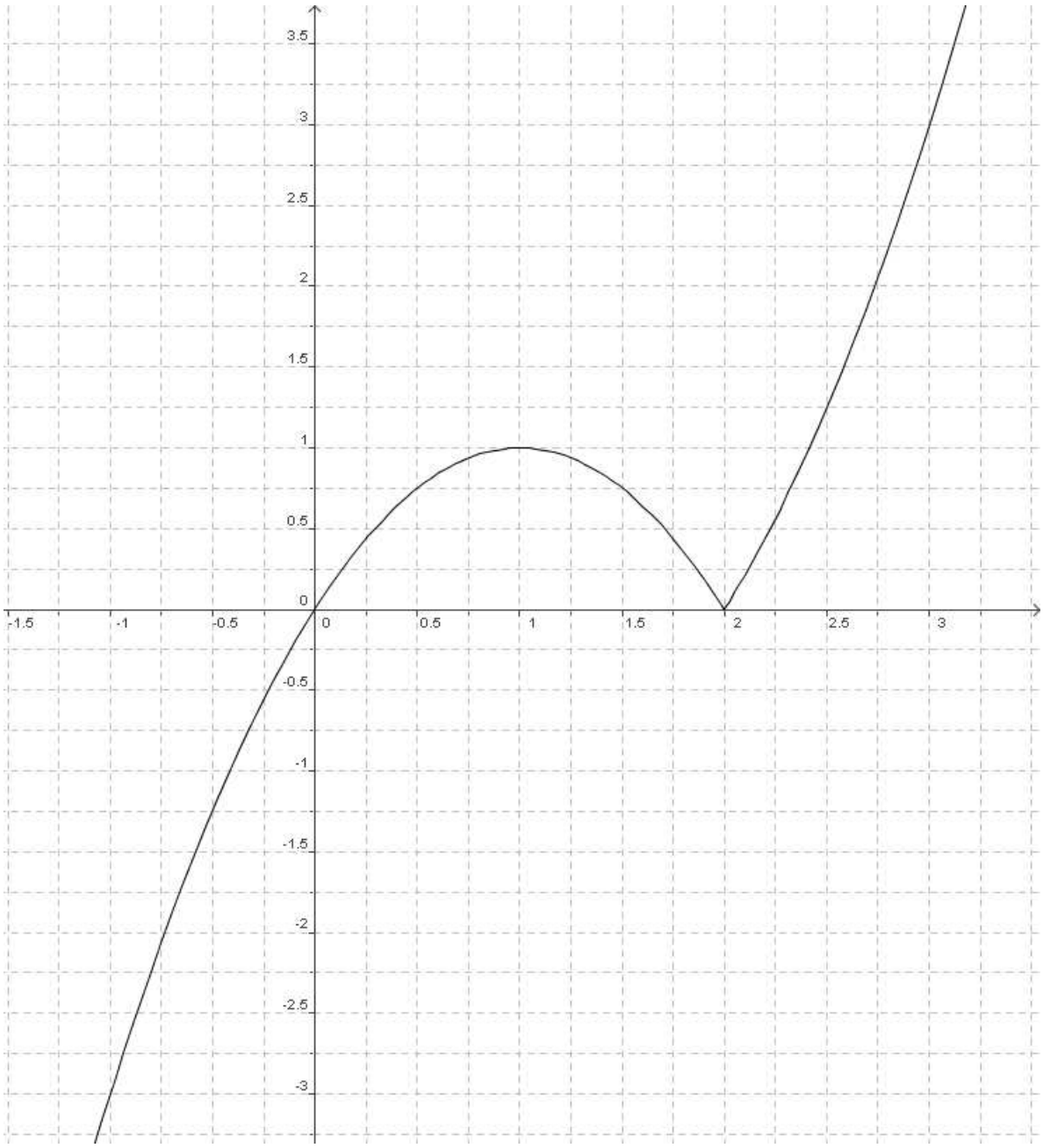
c) Berechnen Sie mittels Differentialquotient die Steigung der Funktion an der Stelle x = 2 durch eine Näherung von rechts und von links.

Anmerkung: *Berechnen Sie den Differentialquotient von beiden Seiten, d.h.* ***x + h*** *und* ***x - h***

Erklären und interpretieren Sie Ihr Ergebnis!

Lösung:

$$f(x) = x \cdot |x-2| = \begin{cases} -x^2 + 2x & x \le 2 \\ x^2 - 2x & x > 2 \end{cases}$$



von links:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x-h)-f(x)}{-h} = \lim_{h\to 0}\frac{-(x-h)^2+2(x-h)-(-x^2+2x)}{-h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{-x^2+2hx-h^2+2x-2h+x^2-2x}{-h} = \lim_{h\to 0}\frac{h(2x-h-2)}{-h}$$

$$f'(x) = -\lim_{h\to 0}(2x-h-2) = -(2x-2) = -2x+2$$

$$f'(2) = -4+2 = (-2)$$

von rechts:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-2(x+h)-(x^2-2x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{x^2+2hx+h^2-2x-2h-x^2+2x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h-2)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}(2x+h-2) = 2x-2$$

$$f'(2) = 4-2 = 2$$

Erklärung: *Der recht- und linksseitige Grenzwert des Differentialquotienten sind unterschiedlich, daher ist die Funktion an der Stelle x = 2 nicht differenzierbar. In der Zeichnung kann man erkennen, dass sie hier zwar stetig ist, aber einen Knick besitzt, wodurch das unterschiedliche Steigungsverhalten (von links bzw. von rechts) deutlich zu erkennen ist.*

❻ Steigungen und Tangenten

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \frac{1}{8}x^4 - x^3$

a) Welche Steigungen besitzt die Funktion in $x_1 = 2 \quad und \quad x_2 = -1$?

Lösung:

$$f(x) = \frac{1}{8}x^4 - x^3 \xrightarrow{Ableitung} f'(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2$$

$$x = 2: \quad f'(2) = \frac{1}{2}\cdot 2^3 - 3\cdot 2^2 = -8$$

$$x = -1: \quad f'(-1) = \frac{1}{2}\cdot(-1)^3 - 3\cdot(-1)^2 = -3\frac{1}{2} = -\frac{7}{2}$$

b) An welcher Stelle hat die Funktion die Steigung m = 0?

Lösung:

$$f(x) = \frac{1}{8}x^4 - x^3 \xrightarrow{Ableitung} f'(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2$$

$$m = 0: \quad f'(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow x^2\left(\frac{1}{2}x - 3\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = 0\,(doppelt) \quad \vee \quad x_2 = 6$$

c) Wie lautet die Gleichung der Tangente an der Stelle $x=-1$?

Lösung:

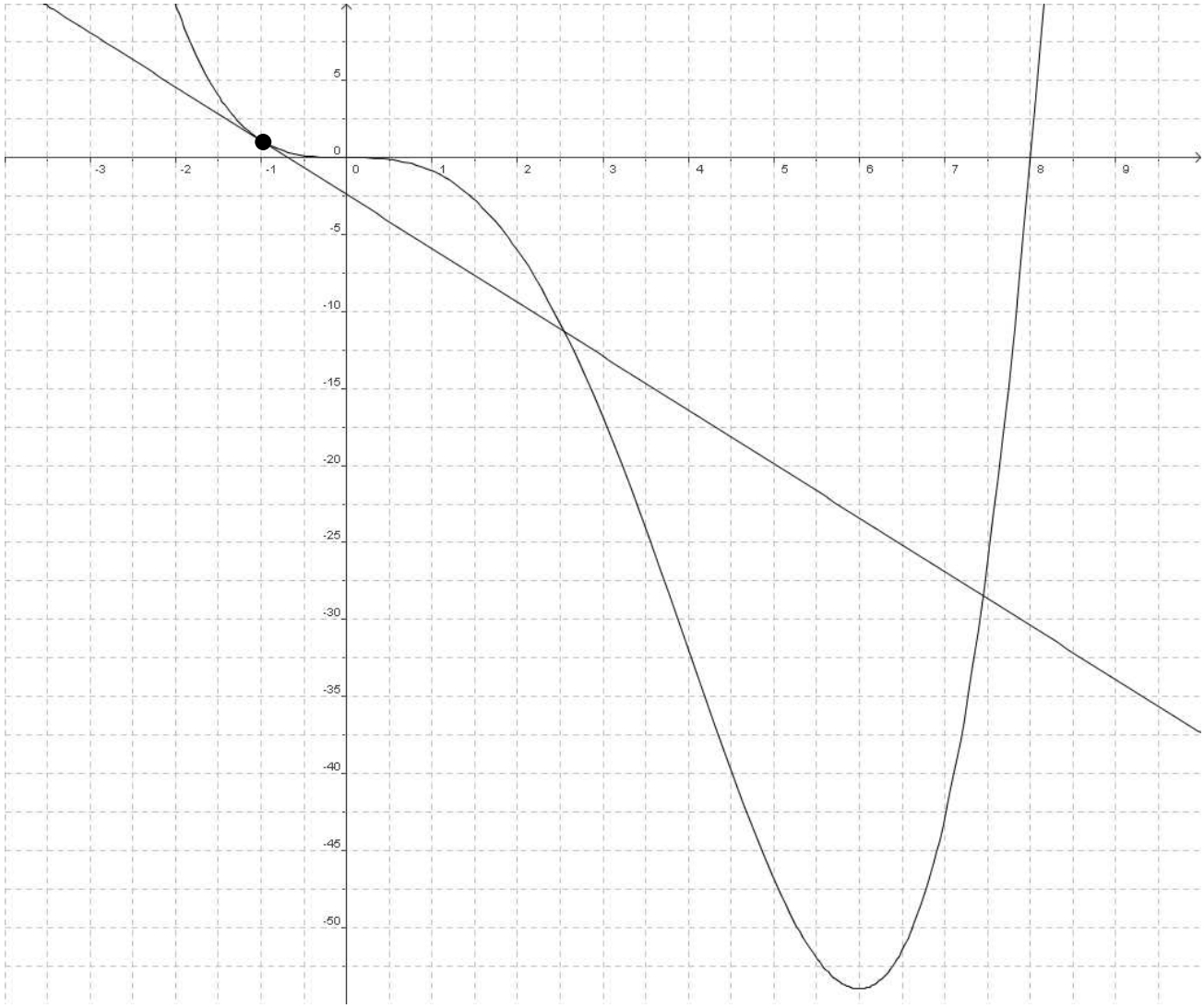
$$\textit{Steigung}: \quad f'(-1) = \frac{1}{2}\cdot(-1)^3 - 3\cdot(-1)^2 = -\frac{7}{2}$$

$$\textit{Punkt}: \quad f(-1) = \frac{1}{8}+1 = \frac{9}{8}$$

$$Y-\textit{Achsenabschnitt der Tabgente}: \quad t(x) = mx+b$$

$$\Rightarrow \quad \frac{9}{8} = \left(-\frac{7}{2}\right)\cdot(-1)+b \quad \Rightarrow \quad b = \frac{9}{8}-\frac{7}{2} = \left(-\frac{19}{8}\right)$$

$$\Rightarrow \quad t(x) = \left(-\frac{7}{2}\right)x - \frac{19}{8}$$



❼ Umkehrfunktionen

I.) Bilden Sie zu den gegebenen Funktionen die Umkehrfunktionen:

a) $f(x) = \sqrt{16-x^3}$ b) $g(x) = 2-\frac{2}{x}$

c) $t(x) = \sqrt{\frac{1}{x-1}}$ d) $d(x) = 2x-1$

e) $k(x) = \frac{x}{x-2}$ f) $m(x) = 4x^2-4$

Lösung:

$$f(x) = \sqrt{16-x^3} \xrightarrow{\text{Variablentausch}} x = \sqrt{16-y^3}$$

$$\xrightarrow{\text{quadrieren}} x^2 = 16-y^3 \xrightarrow{-16} x^2-16 = -y^3$$

$$\xrightarrow{\cdot(-1)\text{ und }\sqrt[3]{\ }} f^{-1}(x) = \sqrt[3]{16-x^2}$$

$$g(x) = 2-\frac{2}{x} \xrightarrow{\text{Variablentausch}} x = 2-\frac{2}{y}$$

$$\xrightarrow{-2} x-2 = -\frac{2}{y} \xrightarrow{\cdot y} y(x-2) = -2$$

$$\xrightarrow{:(x-2)} g^{-1}(x) = -\frac{2}{x-2} = \frac{2}{2-x}$$

$$t(x) = \sqrt{\frac{1}{x-1}} \xrightarrow{\text{Variablentausch}} x = \sqrt{\frac{1}{y-1}}$$

$$\xrightarrow{\text{quadrieren}} x^2 = \frac{1}{y-1} \xrightarrow{\cdot(y-1)} x^2(y-1) = 1$$

$$\xrightarrow{:x^2 \text{ und } +1} t^{-1}(x) = \frac{1}{x^2}+1$$

$$d(x) = 2x-1 \xrightarrow{\text{Variablentausch}} x = 2y-1$$

$$\xrightarrow{+1} x+1 = 2y \xrightarrow{:2} d^{-1}(x) = \frac{x+1}{2} = \frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$$

$$k(x) = \frac{x}{x-2} \xrightarrow{\text{Variablentausch}} x = \frac{y}{y-2}$$

$$\xrightarrow{\cdot(y-2)} x\cdot(y-2) = y \xrightarrow{\text{ausmultiplizieren}} xy-2x = y$$

$$\xrightarrow{+2x \text{ und } -y} xy-y = 2x \xrightarrow{y \text{ ausklammern}} y(x-1) = 2x$$

$$\xrightarrow{:(x-1)} k^{-1}(x) = \frac{2x}{x-1}$$

$$m(x) = 4x^2-4 \xrightarrow{\text{Variablentausch}} x = 4y^2-4$$

$$\xrightarrow{+4} x+4 = 4y^2 \xrightarrow{:4} \frac{x+4}{4} = y^2$$

$$\xrightarrow{\sqrt{\ }} m^{-1}(x) = \pm\sqrt{\frac{x+4}{4}} = \pm\sqrt{\frac{1}{4}x+1}$$

II.) Gegeben sei das Schaubild einer Wurzelfunktion der Form

$$f_{a,b}(x) = \sqrt{ax+b}$$

a) Ermitteln Sie die Parameter a und b für die Funktion im Graphen.

Lösung:

1.) $f_{a,b}(-4) = 0$

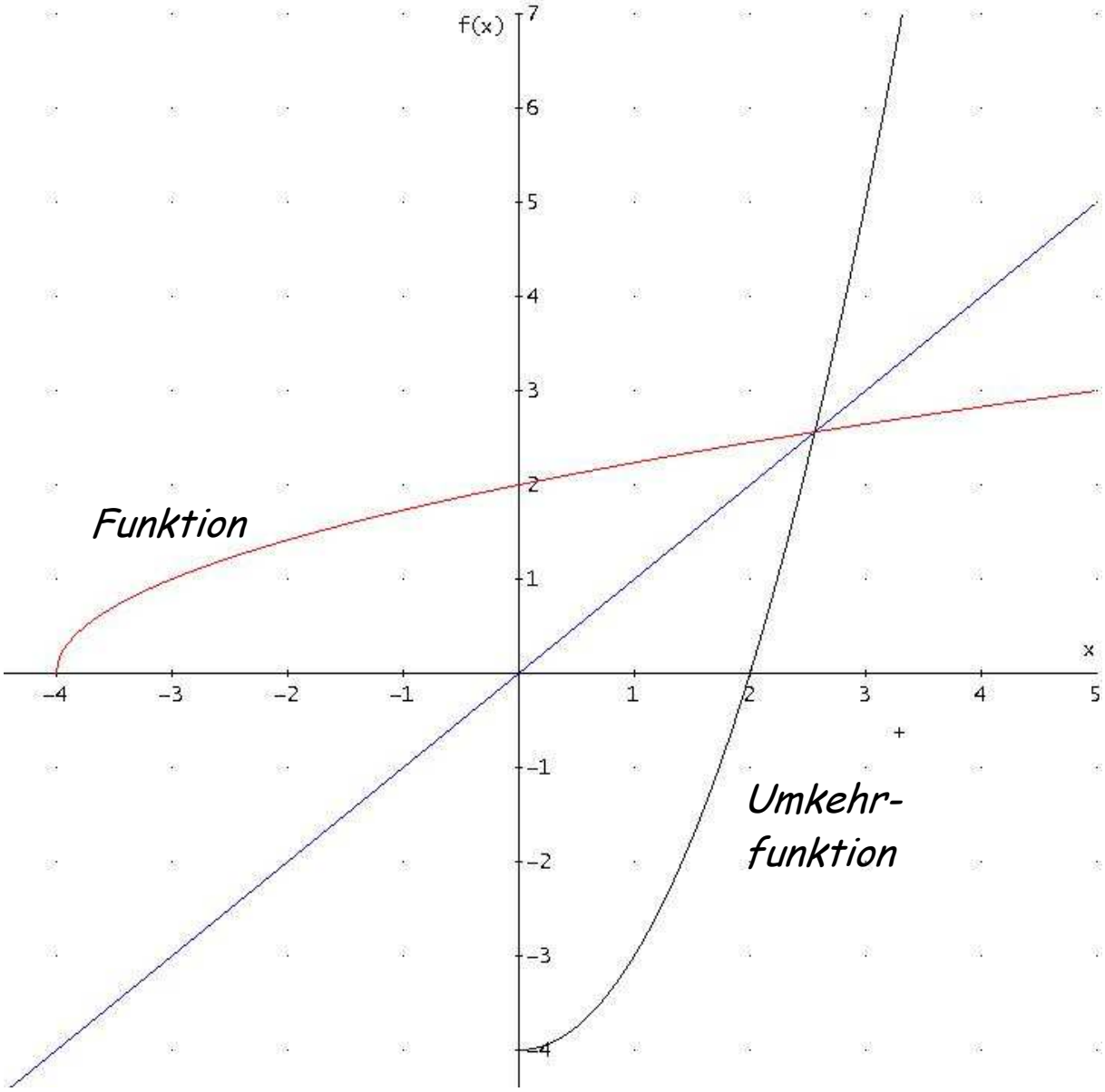
$$\Rightarrow f_{a,b}(-4) = \sqrt{(-4)a+b} = 0$$

$$\xrightarrow{\text{quadrieren}} (-4)a+b = 0 \Rightarrow b = 4a$$

2.) $f_{a,b}(0) = 2$

$\Rightarrow \quad f_{a,b}(0) = \sqrt{0 \cdot a + b} = 2 \xrightarrow{\text{quadrieren}} b = 4$

$\Rightarrow \quad 4 = 4a \Rightarrow a = 1$

$\Rightarrow \quad f_{a,b}(x) = \sqrt{x+4}$

b) Konstruieren Sie die Umkehrfunktion zu dieser Funktion