Musterlösung **11. Jgst.** **2. Test** **Datum: 29.11.2005**

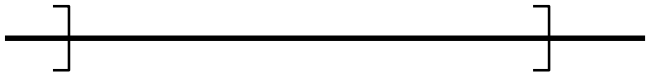
Klasse: GY 05 a **Fach: Mathematik (Kernfach)**

Thema: **Gebrochen-rationale Funktionen;**
Intervalle

---

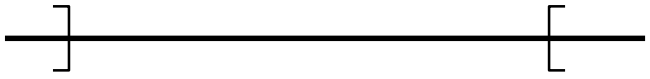
❶ **Intervalle: Stellen Sie die Abschnitte in Intervall- und in Mengenschreibweise dar**

a)

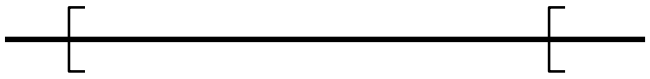


b)

c)



d)



Lösung:

a) $A =]-4;2]$ $A = \{x \in \Re \mid -4 < x \leq 2\}$

b) $B = [-4;2]$ $B = \{x \in \Re \mid -4 \leq x \leq 2\}$

c) $C =]-4;2[$ $C = \{x \in \Re \mid -4 < x < 2\}$

d) $D = [-4;2[$ $D = \{x \in \Re \mid -4 \leq x < 2\}$

❷ **Mengen: Zu welcher kleinstmöglichen Zahlenmenge gehören diese Zahlen?**

a) $\sqrt{9}$ b) $-\sqrt{9}$ c) $\sqrt{\frac{9}{4}}$

d) Nennen Sie eine Zahl für die folgendes gilt: $z \in \Re \setminus Q$

Lösung:

a) N (natürliche Zahl) b) Z (ganze Zahl)

c) Q (rationale Zahl) d) π oder e (Eulersche Zahl)

❸ **Intervall: Schreiben Sie die Mengen als Intervalle**

a) $A = \{x \in \Re \mid x > 3\}$ b) $B = \{x \in \Re \mid x \leq -4\}$

c) $C = \{x \in \Re \mid x < 8\}$ d) $D = \{x \in \Re \mid x^2 < 4\}$

Lösung:

a) $A = \{x \in \Re \mid x > 3\} \Rightarrow A =]\,3\,; \infty\,[$

b) $B = \{x \in \Re \mid x \leq -4\} \Rightarrow B =]\,-\infty\,; -4\,]$

c) $C = \{x \in \Re \mid x < 8\} \Rightarrow C =]\,-\infty\,; 8\,[$

d) $D = \{x \in \Re \mid x^2 < 4\} \Rightarrow D =]\,-2\,; 2\,[$

❹ Grenzwerte I

Bestimmen Sie die Definitionsmenge und die Grenzwerte für $x \to \infty$ folgender Funktionen

a) $f(x) = \dfrac{3x^2+4x-7}{(x-2)(x+3)}$ b) $f(x) = \dfrac{2x^3}{x^2-1}$

c) $f(x) = \dfrac{x-\sqrt{x}+1}{x+1}$ d) $f(x) = \dfrac{2x^3}{\left(x^2-1\right)^2}$

Lösung:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2+4x-7}{(x-2)(x+3)} = 3 \quad und \quad D = \Re \setminus \{-3;2\}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3}{x^2-1} = \infty \quad und \quad D = \Re \setminus \{-1;1\}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x-\sqrt{x}+1}{x+1} = 1 \quad und \quad D = \Re_0^+$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3}{\left(x^2-1\right)^2} = 0 \quad und \quad D = \Re \setminus \{-1;1\}$

❺ Grenzwerte II

Geben Sie gebrochen-rationale Funktionen mit folgenden Eigenschaften an:

a) Grenzwert für $x \to \infty$: $\dfrac{3}{2}$

b) Grenzwert für $x \to \infty$: 0 und Def.-bereich: $D = \Re \setminus \{-1;2\}$

Lösung:

a) $f(x) = \dfrac{3x^2+ax+b}{2x^2+cx+d} \quad mit \quad a,b,c,d \in \Re$

b) $f(x) = \dfrac{ax+b}{c(x-2)(x+1)} \quad mit \quad a,b \in \Re \quad und \quad c \in \Re \setminus \{0\}$

❻ Symmetrie I

Untersuchen Sie die Symmetrie der gegebenen Funktionen:

a) $f(x) = 2x^3 - x$ b) $g(x) = 2x^4 - x^2 + 2$

Lösung:

a)
$$f(-x) = 2(-x)^3 - (-x) = -2x^3 + x = -f(x)$$
$$\Rightarrow \textit{ Punktsymmetrie}$$

b)
$$g(-x) = 2(-x)^4 - (-x)^2 + 2 = 2x^4 - x^2 + 2 = f(x)$$
$$\Rightarrow \textit{ Achsensymmetrie}$$

❼ Symmetrie II

Definieren Sie den Begriff „Punktsymmetrie" und veranschaulichen Sie dies graphisch.

Lösung:

Eine Funktion ist punktsymmetrisch, wenn sie folgender Bedingung genügt:

$$f(-x) = -f(x) \quad \textit{oder} \quad -f(-x) = f(x)$$

Graphisch bedeutet dies eine Punktspiegelung am Ursprung.