Musterlösung 11. Jgst. 5. Kursarbeit (gemeinsame Kurarbeit)

Datum: 13.06.2006 Klasse: GY 05 c Fach: Mathematik

(Kernfach)

Thema: Kurvenuntersuchung, Stetigkeit, Differenzierbarkeit, Exponentialfunktionen

---

1.) Kurvenuntersuchung ganzrationaler Funktionen

Untersuchungen an der Funktion zu $f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2$

Alle Ergebnisse sind zu begründen!

a) Prüfen Sie auf Symmetrie. (1)

Lösung:

Weder ursprungs- noch y-Achsen-symmetrisch, weil sowohl gerade als auch ungerade Exponenten vorliegen.

Analytische Begründung auch möglich:

$$f(-x) \neq f(x) \quad und \quad f(-x) \neq -f(x)$$

b) Machen Sie Angaben zur maximalen Anzahl der Nullstellen, Extrem- und Wendepunkte. (1)

Lösung:

Maximal 4 Nullstellen, 3 Extrem-, 2 Wendepunkte, weil der Grad von $f(x)$ 4, von $f'(x)$ 3 und von $f''(x)$ 2 beträgt und nach dem Nullstellensatz sich somit 4; 3; 2 Lösungselemente ergeben können.

c) Bestimmen Sie das Verhalten für $x \to \pm\infty$. (2)

Lösung:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{1}{12}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \right) \quad \xrightarrow{\text{größter Exponent 4 ist gerade}} \quad \infty$$

d) Bestimmen Sie die Nullstellen. (2)

Lösung:

$$x^2\left(\frac{1}{12}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{3}{2} \right) = 0 \Rightarrow x_{1;2} = 0. \; x^2 - 8x + 18 = 0 \Rightarrow x_{3;4} = 4 \pm \sqrt{-2} \text{ n.d.} \quad N_{doppelt}(0|0)$$

e) Bestimmen Sie Lage und Art der Extrempunkte. (4)

Lösung:

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x \qquad f''(x) = x^2 - 4x + 3 \qquad f'''(x) = 2x - 4.$$

$$f'(x) \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x\left(\frac{1}{3}x^2 - 2x + 3\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = 0 \ \wedge \ x^2 - 6x + 9 = 0 \quad \xrightarrow{\text{Lösungsformel}} \quad x_{2;3} = 3$$

$$\xrightarrow{\text{Prüfung x = 0}} \quad f''(0) = 3 > 0 \quad \xrightarrow{\text{Tiefpunkt} \Rightarrow \text{ x = 0 in f(x) einsetzen}} \quad T(0\,|\,0)$$

$$\xrightarrow{\text{Prüfung x = 3}} \quad f''(3) = 0 \quad \xrightarrow{\text{kein Extremwert}} \quad \textit{Sattelpunkt}$$

f) Bestimmen Sie die Koordinaten des Wendepunkts bzw. der Wendepunkte. (2)

Lösung:

$$f''(x) = x^2 - 4x + 3 \qquad f'''(x) = 2x - 4.$$

$$f''(x) \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - 4x + 3 = 0 \quad \xrightarrow{\text{Lösungsformel}} \quad x_1 = 1 \ \wedge \ x_2 = 3$$

$$\xrightarrow{\text{Prüfung x = 1}} \quad f'''(1) = -2 \neq 0 \quad \xrightarrow{\text{Wendepunkt} \Rightarrow \text{ x = 0 in f(x) einsetzen}} \quad W\left(1\,|\,\frac{11}{12}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{Prüfung x = 3}} \quad f'''(3) = 2 \neq 0 \quad \xrightarrow{\text{Wendepunkt} \Rightarrow \text{ x = 3 in f(x) einsetzen}} \quad W\left(3\,|\,\frac{9}{4}\right)$$

g) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der **Normalen** im Punkt $B\left(1 \mid f\left(1\right)\right)$ (3)

Lösung:

$$f(1) = \frac{11}{12} \ \wedge \ f'(1) = \frac{4}{3} = m_t \quad \xrightarrow{m_t \cdot m_n = (-1)} \quad m_n = -\frac{3}{4}$$

$$Normale: \quad n(x) = m_n x + b \quad \xrightarrow{\text{einsetzen}} \quad \frac{11}{12} = \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot 1 + b \quad \Rightarrow \quad b = \frac{5}{3}$$

$$Normale: \quad n(x) = \left(-\frac{3}{4}\right)x + \frac{5}{3}$$

h) In welchem Intervall ist die Funktion rechtsgekrümmt? (2)

Lösung:

Die Krümmungsintervalle lauten:

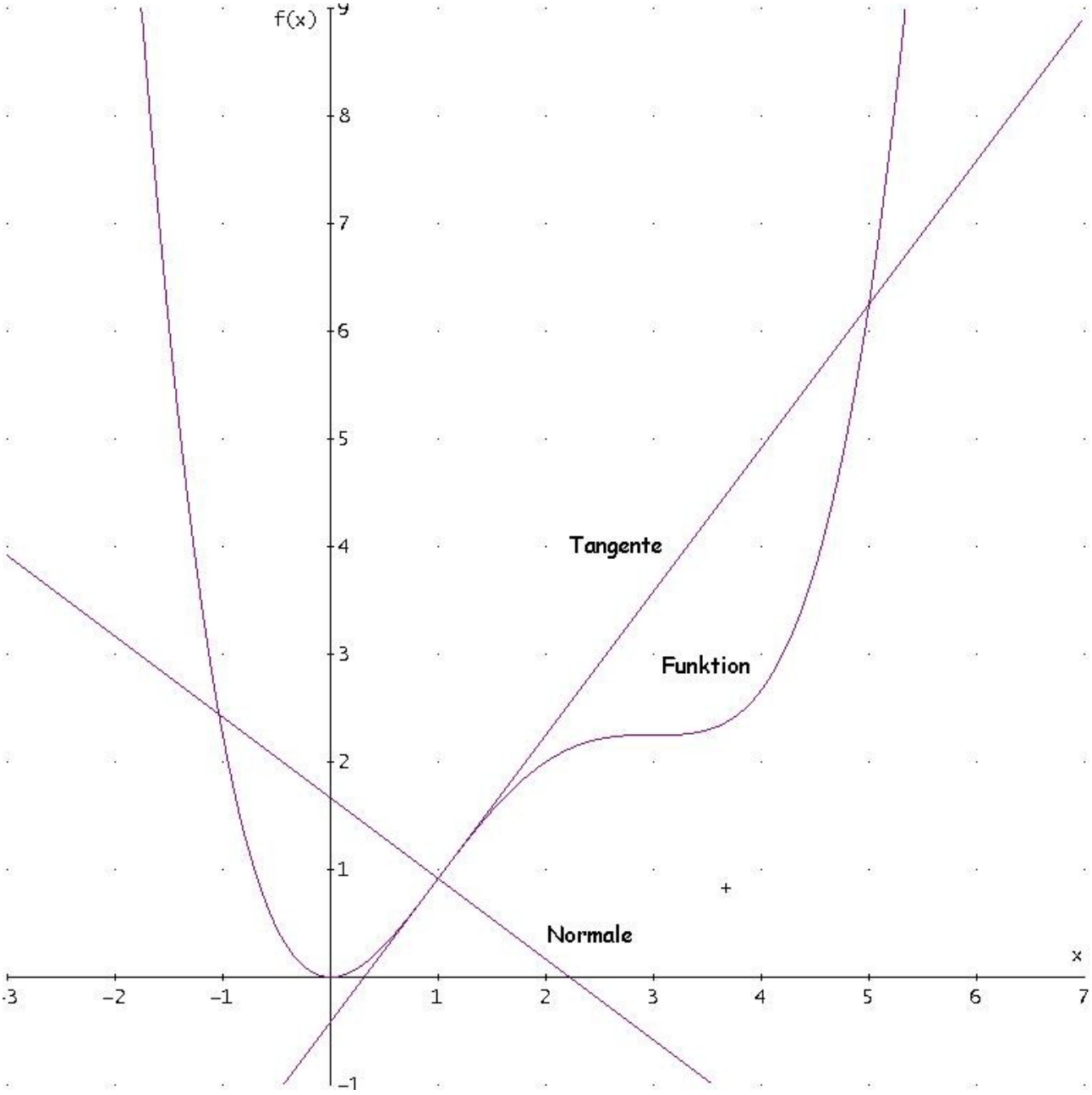
$$I_1 = \left]-\infty\ ;\ 1\right[\quad \xrightarrow{f''\ pr\ddot{u}fen} \quad f''(0) = 3 > 0 \quad \Rightarrow \quad \textit{Linkskrümmung}$$

$$I_2 = \left]1\ ;\ 3\right[\quad \xrightarrow{f''\ pr\ddot{u}fen} \quad f''(2) = -1 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Rechtskrümmung}$$

$$I_3 = \left]3\ ;\ \infty\right[\quad \xrightarrow{f''\ pr\ddot{u}fen} \quad f''(4) = 3 > 0 \quad \Rightarrow \quad \textit{Linkskrümmung}$$

i) Zeichnen Sie den Funktionsgraphen, Maßstab 1cm. (3)

Lösung:



2.) Kurvenuntersuchung gebrochen-rationaler Funktionen

Untersuchen Sie nun die Funktion mit $f(x) = \dfrac{2x-1}{2x+1}$

a) Bestimmen Sie Definitionslücken und Achsenschnittpunkte des Graphen von f(x) und geben Sie den Definitionsbereich an.

Lösung:

$$Polstelle: \quad 2x+1=0 \quad \Rightarrow \quad x=-\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad D=\Re \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$$

$$Nullstelle: \quad 2x-1=0 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{1}{2}$$

$$y-Achsenschnittpunkt: \quad f(0)=-1 \quad \Rightarrow \quad S_y(0\mid -1)$$

b) Ermitteln Sie senkrechte Asymptoten (Pol-Asymptoten) und „waagrechte" Asymptoten (Näherungskurven im Unendlichen).

Lösung:

Asymptote liegt bei a(x) = 1, da der Grad im Zähler und Nenner identisch ist und somit folgender Grenzwertprozess vorliegt:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x-1}{2x+1} \quad \longrightarrow \quad 1$$

Polstelle / senkrecht Asymptote: $x = -\dfrac{1}{2}$

c) Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion an der Polstelle und für $x \to \pm\infty$.

Lösung:

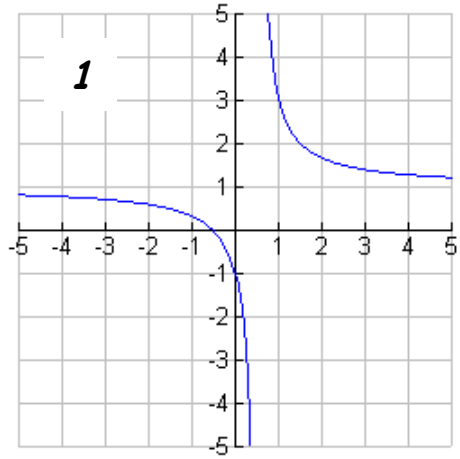
Verhalten an der Polstelle:

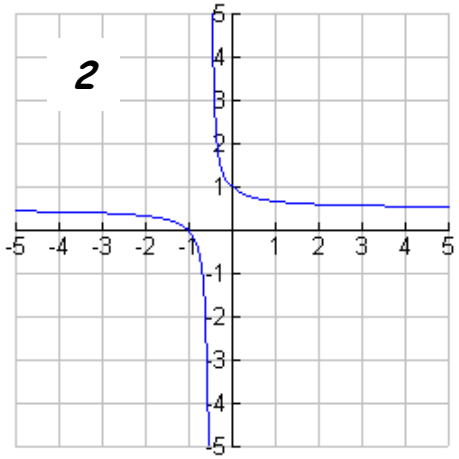
$$\lim_{\substack{x\to -\frac{1}{2}\\ h\to 0}} f(x) \overset{x=-\frac{1}{2}+h}{=} \lim_{h\to 0} \frac{2\left(-\frac{1}{2}+h\right)-1}{2\left(-\frac{1}{2}+h\right)+1} = \lim_{h\to 0} \frac{2h-2}{2h} \quad \overset{h\to 0}{\longrightarrow} \quad -\infty$$

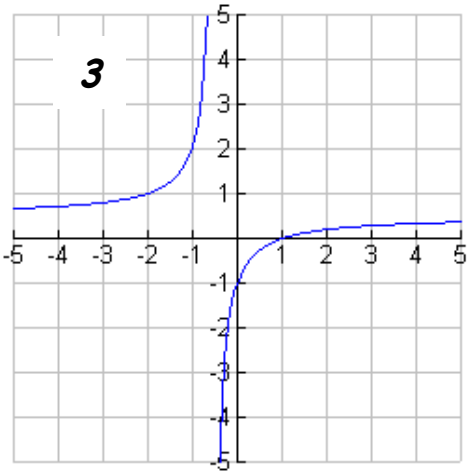
$$\lim_{\substack{x \to -\frac{1}{2} \\ h \to 0}} f(x) \quad \overset{x = -\frac{1}{2} - h}{=} \quad \lim_{h \to 0} \frac{2\left(-\frac{1}{2} - h\right) - 1}{2\left(-\frac{1}{2} - h\right) + 1} \quad = \quad \lim_{h \to 0} \frac{-2h - 2}{-2h} \quad \xrightarrow{h \to 0} \quad \infty$$

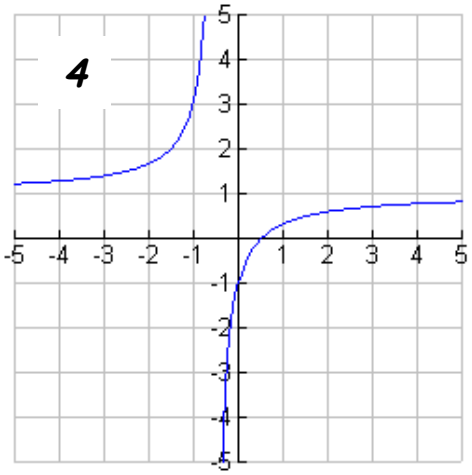
⇒ Polstelle mit Vorzeichenwechsel

d) Welcher Graph (siehe unten) entspricht dieser Funktion?
Begründung mit drei Argumenten.









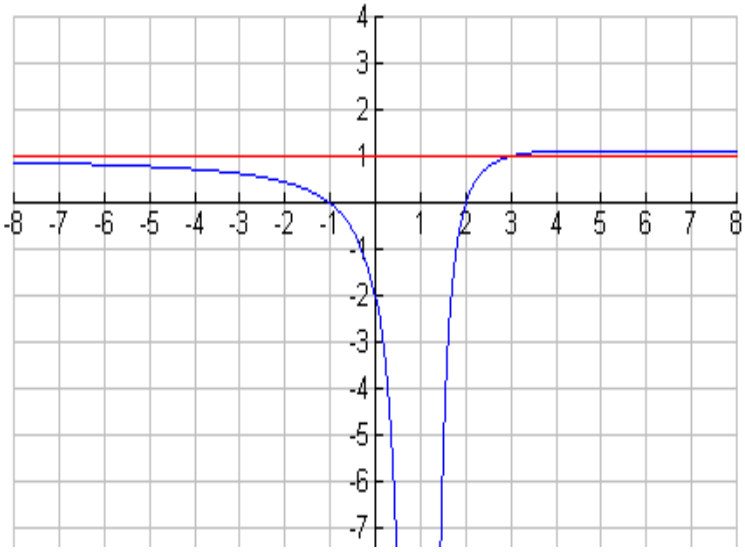
Lösung:

Graph 4 bildet die gesuchte Funktion ab.

Gründe: Polstelle, Nullstelle, Asymptote

e) Ermitteln Sie den Funktionsterm der Funktion mit dem folgenden Graphen.

Überprüfen Sie Ihren Funktionsterm anhand der Achsenschnittpunkte, waagrechten Asymptoten und dem Verhalten an der Polstelle!



Lösung:

Asymptote bei a(x) = 1 => **Zähler- und Nennergrad sind identisch; Koeffizienten ebenfalls gleich;**

Pol ohne VZW bei x = 1 => **Anzahl der Nennernullstelle muss gerade sein;**

Nullstellen bei $x_1 = -1$ und $x_2 = 2$ => **Linearfaktorzerlegung im Zähler muss diese Lösungen besitzen**

$$\Rightarrow \quad f(x) = \frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)^2}$$

3.) Stetigkeit und Differenzierbarkeit

a) Gegeben sei die abschnittsweise definierte Funktion f(x) mit

$$f(x) = \begin{cases} ax + 5 & x < -2 \\ 3 & x = -2 \\ -\frac{1}{4}x^2 + 4 & x > -2 \end{cases}$$

(i) Bestimmen Sie den Parameter a so, dass die abschnittsweise definierte Funktion f(x) an der Stelle $x_0 = -2$ stetig ist.

Lösung:

$$\lim_{\substack{x \to -2 \\ h \to 0}} f(x) \overset{x=-2-h}{=} \lim_{h \to 0} a(-2-h) + 5 \overset{\text{Grenzwert-übergang}}{=} -2a + 5 \overset{\text{gleich-setzen}}{=} 3$$

$\Rightarrow \quad a = 1$

Stetigkeitsbeweis :

$$\lim_{\substack{x \to -2 \\ h \to 0}} f(x) \overset{x=-2+h}{=} \lim_{h \to 0} \left[-\frac{1}{4}(-2+h)^2 + 4 \right] \overset{\text{Grenzwert-übergang}}{=} 3$$

Funktionswert :

$f(-2) = 3$

$\Rightarrow$ Die Funktion $f(x)$ ist an der Stelle $x = -2$ für $a = 1$ stetig.

(ii) Zeigen Sie, dass die Funktion f(x) dann (für diesen Wert von a) an der Stelle $x_0 = -2$ auch differenzierbar ist.

Lösung:

Rechtseitige Grenzbetrachtung:

$$\lim_{\substack{x \to -2 \\ h \to 0}} \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x} \overset{x=-2}{=} \lim_{h \to 0} \left[\frac{-\frac{1}{4}(-2+h)^2 + 4 - \left(\left(-\frac{1}{4} \right) \cdot (-2)^2 + 4 \right)}{h} \right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{-\frac{1}{4}(4 - 4h + h^2) + 4 - 3}{h} \right] \overset{\text{Ausmultiplizieren}}{=} \lim_{h \to 0} \left[\frac{-1 + h - \frac{1}{4}h^2 + 4 - 3}{h} \right]$$

$$\overset{\text{Vereinfachen}}{=} \lim_{h \to 0} \left[\frac{h - \frac{1}{4}h^2}{h} \right] \overset{\text{Ausklammern}}{=} \lim_{h \to 0} \left[\frac{h\left(1 - \frac{1}{4}h\right)}{h} \right]$$

$$\overset{\text{kürzen}}{=} \lim_{h \to 0} \left(1 - \frac{1}{4}h \right) \overset{\text{Grenzwert-übergang}}{=} 1$$

Linksseitige Grenzbetrachtung:

$$\lim_{\substack{x \to -2 \\ h \to 0}} \frac{f(x-h) - f(x)}{(x-h) - x} \overset{x=-2}{=} \lim_{h \to 0} \left[\frac{(-2-h) + 5 - (-2+5)}{-h} \right]$$

$$\overset{\text{Auflösen derKlammern}}{=} \lim_{h \to 0} \left[\frac{-2-h+5-3}{-h} \right] \overset{\text{Vereinfachen}}{=} \lim_{h \to 0} \left[\frac{-h}{-h} \right] = 1$$

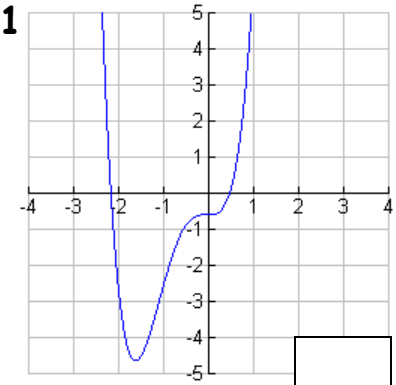
$\Rightarrow$ Die Funktion $f(x)$ ist an der Stelle $x = -2$ für $a = 1$ differenzierbar.

b) Ordnen Sie den Funktionsgraphen (1-3) den passenden Graphen der 1. Ableitung zu. Notieren Sie in dem Kasten den zutreffenden Buchstaben (A,B).
Ein Funktionsgraph geht leer aus ☹.

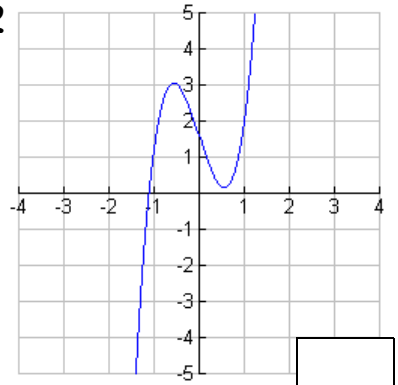
Skizzieren Sie für diesen Funktionsgraphen den zugehörigen Graphen der 1.Ableitung:

Funktionsgraphen

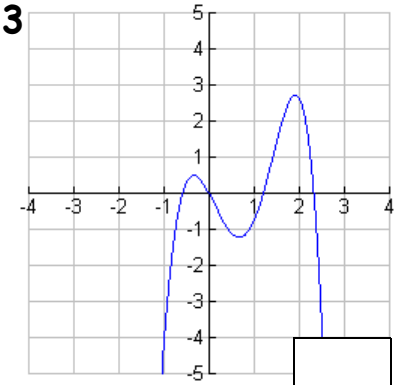
1



2

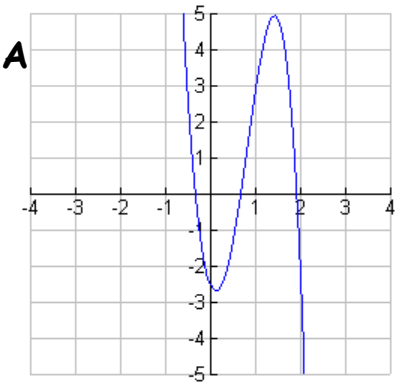


3

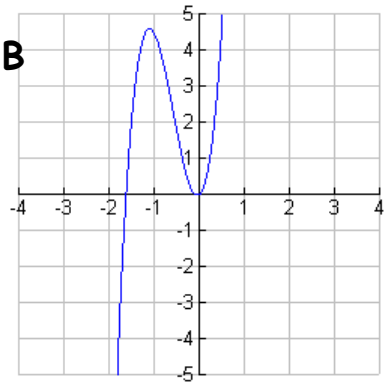


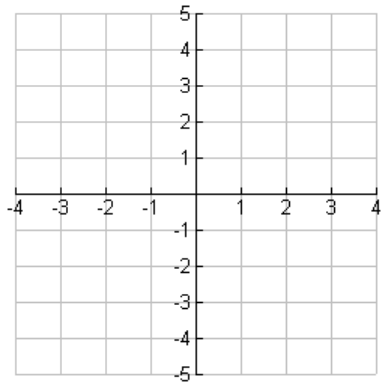
Ableitungsgraphen

A



B

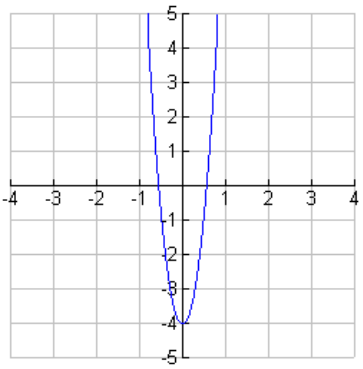




Lösung:

Der Funktionsgraph 1 wird dem Ableitungsgraphen B zugeordnet.
Der Funktionsgraph 3 wird dem Ableitungsgraphen A zugeordnet.

Funktionsgraph 2 besitzt folgende Ableitungsfunktion:



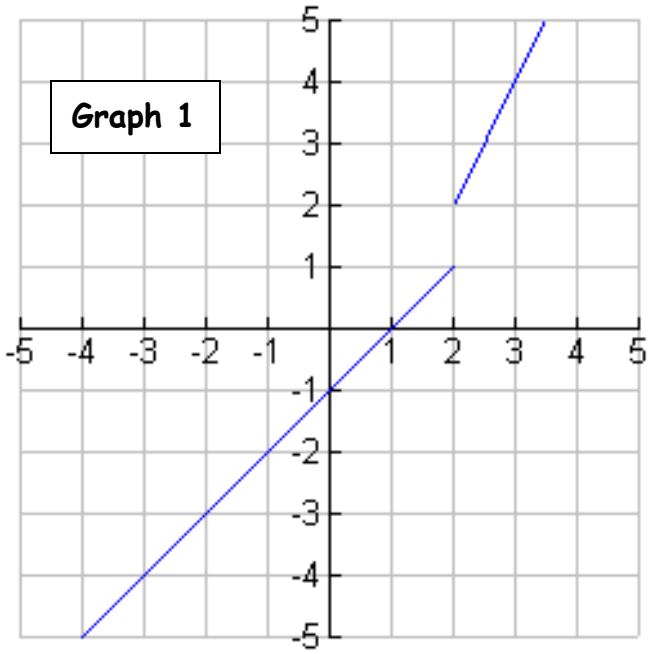
c) An welchen Stellen $x_0 \in \Re$ ist die Funktion g(x) in Graph 1

(i) stetig und differenzierbar,

(ii) stetig aber nicht differenzierbar

(iii) nicht stetig

(iv) nicht differenzierbar.



$$g(x) = \begin{cases} x - 1 & x \leq 2 \\ 2x - 2 & x > 2 \end{cases}$$

Lösung:

(i) $x \in \Re \setminus \{2\}$

(iii) x = 2

(ii) keine Stelle

(iv) x = 2 (da nicht stetig)

4.) Exponentialfunktionen und -gleichungen

a) Lösen Sie folgende Exponentialgleichung: $e^{2x} - e^{x} = 0$

Lösung:

$$e^{2x} - e^{x} = 0 \Rightarrow e^{2x} = e^{x} \xrightarrow{\text{Exponenten-vergleich}} 2x = x$$

$$\xrightarrow{-x} x = 0$$

b) Füllen Sie die Lücken aus:

Lösung:

Eigenschaften der Exponentialfunktion

Die Schaubilder der Exponentialfunktion $f(x) = a^x$ gehen alle durch den Punkt $P($ **0** $|$ **1** $)$.

Für a > 1 sind die Expo-Funktionen alle streng monoton **steigend**

Für 0 < a < 1 sind die Expo-Funktionen alle streng monoton **fallend**

Die Wertemenge aller Expo-Funktionen ist $W = \mathbb{R}^+$

Statt $f(x) = a^{-x}$ kann man auch $f(x) = \frac{1}{a^x}$ schreiben.

Das bedeutet, die Schaubilder der Funktionen f(x) mit $f(x) = a^x$ und g(x) mit $g(x) = a^{-x}$ sind **(achsen-)symmetrisch** bezüglich der Ordinate (Y-Achse).

c) **Anwendungen zu Exponentialfunktionen**

Veränderung der Verbraucherpreise in Deutschland und in Simbabwe

In Deutschland haben sich die Preise innerhalb des letzten Jahres im Durchschnitt etwa um 2,4 % erhöht.

Der nachstehende Artikel aus der Rheinpfalz schildert die Situation in Simbabwe.

a) Wie lauten die beiden Wachstumsfaktoren bezüglich der Gesamtausgaben in Deutschland und in Simbabwe im April?

Lösung:

D: 1,024 S: 11,429

Inflationsrekord in Simbabwe

Mit einer Inflationsrate von erstmals mehr als 1000 Prozent hat die Wirtschaftskrise in Simbabwe einen neuen Höhepunkt erreicht. Die Statistikbehörde gab die Preissteigerung im April im Vergleich zum Vorjahresmonat mit exakt 1042,9 Prozent an. Im März waren es noch 913 Prozent gewesen. Seit der Landreform von Präsident Robert Mugabe im Februar 2000 befindet sich die Volkswirtschaft des afrikanischen Staates im freien Fall. Die Enteignung von 5000 weißen Farmern hat die Landwirtschaft – unser Bild zeigt Tabakbauern und -händler bei einer Auktion in Harare – zum Erliegen gebracht und eine schwere Hungerkrise ausgelöst. (Text: ap/Foto: afp)

Die Rheinpfalz - Speyerer Rundschau Nr. 112 - Montag, 15. Mai 2006

b) Bilden Sie die beiden Preissteigerungen als Exponentialfunktion für Deutschland und Simbabwe (Anfangswerte: 1.000,00 €).

Lösung:

D: $d(x) = 1.000 \cdot 1,024^x$ S: $s(x) = 1.000 \cdot 11,429^x$

c) Wie hoch werden die Ausgaben nach 2 Jahren in den beiden Ländern sein?

Lösung:

D: $d(2) = 1.000 \cdot 1,024^2 = 1.048,58$

S: $s(2) = 1.000 \cdot 11,429^2 = 130.622,04$

d) Nach welcher Zeit werden sich die Preise in Deutschland verdoppelt haben, wenn die vorhandene Preissteigerungsrate konstant bliebe?

Lösung:

$$2.000 = 1.000 \cdot 1,024^x \quad \xrightarrow{:1.000} \quad 2 = 1,024^x$$

$$\xrightarrow{\ln} \quad \ln(2) = x \cdot \ln(1,024) \quad \xrightarrow{:\ln(1,024)} \quad x = 29,226\,[Jahre]$$