Musterlösung **11. Jgst.** **4. Kursarbeit** **Datum: 21.03.2006**

Klasse: GY 05 a **Fach: Mathematik (Kernfach)**

Thema: **Stetigkeit und Differenzierbarkeit; Ableitungen, Tangenten; Extremwerte**

1.) Differentialquotient

Bilden Sie mit Hilfe des Differentialquotienten die Ableitung folgender Funktionen:

a) $f(x) = 2x$

b) $f(x) = x^3 + x$

c) $f(x) = 5$

Lösung:

$$f(x) = 2x$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2(x_0+h) - 2x_0}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{2x_0 + 2h - 2x_0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2h}{h} = 2$$

$$f(x) = x^3 + x$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\left[(x_0+h)^3 + (x_0+h)\right] - \left({x_0}^3 + x_0\right)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{{x_0}^3 + 3{x_0}^2 h + 3x_0 h^2 + h^3 + x_0 + h - {x_0}^3 - x_0}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{h\left(3{x_0}^2 + 3x_0 h + h^2 + 1\right)}{h} = \lim_{h \to 0} \left(3{x_0}^2 + 3x_0 h + h^2 + 1\right) = 3{x_0}^2 + 1$$

$$f(x) = 5$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{5-5}{h} = 0$$

2.) Ableitungen

Bilden Sie die erste Ableitung der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = \frac{5x^3 - 2x^2 + x - 3}{x^2}$

b) $f(x) = \frac{2}{9}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 4$

c) $f(x) = \frac{2}{x^3}$

d) $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x}$

e) $f(x) = \left(x^2 - 2\right)^2$

f) $f(x) = -\frac{2n}{x^n}$

g) $f(x) = (n-1)! \cdot x^n$

Lösung:

a) $f(x) = \frac{5x^3 - 2x^2 + x - 3}{x^2} = 5x - 2 + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2}$

$\xrightarrow{Ableitung} f'(x) = 5 - \frac{1}{x^2} + \frac{6}{x^3}$

b) $f(x) = \frac{2}{9}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 4 \xrightarrow{Ableitung} f'(x) = \frac{2}{3}x^2 - x$

c) $f(x) = \frac{2}{x^3} \xrightarrow{Ableitung} f'(x) = -\frac{6}{x^4}$

d) $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x} \xrightarrow{Ableitung} f'(x) = \frac{1}{4\sqrt{x}}$

e) $f(x) = \left(x^2 - 2\right)^2 = x^4 - 4x^2 + 4 \xrightarrow{Ableitung} f'(x) = 4x^3 - 8x$

f) $f(x) = -\frac{2n}{x^n} \xrightarrow{Ableitung} f'(x) = \frac{2n^2}{x^{n+1}}$

g) $f(x) = (n-1)! \cdot x^n \xrightarrow{Ableitung} f'(x) = n! \cdot x^{n-1}$

3.) Tangenten ermitteln

Bestimmen Sie die Tangenten der Funktionen f(x) und g(x)

a) $f(x) = \frac{2}{3}x^4 + x + 1$ in x = **1**.

b) $g(x) = \frac{1}{3}x^2 - x$ in x = **-2**.

Lösung:

$$f(x) = \frac{2}{3}x^4 + x + 1 \xrightarrow{x=1} f(1) = \frac{8}{3}$$

$$f'(x) = \frac{8}{3}x^3 + 1 \xrightarrow{x=1} f'(1) = \frac{11}{3}$$

$$t(x) = mx + b \xrightarrow{m=\frac{11}{3};\, y=\frac{8}{3};\, x=1} \frac{8}{3} = \frac{11}{3}\cdot 1 + b \Rightarrow b = -1$$

$$\Rightarrow t(x) = \frac{11}{3}x - 1$$

$$g(x) = \frac{1}{3}x^2 - x \xrightarrow{x=-2} g(-2) = \frac{10}{3}$$

$$g'(x) = \frac{2}{3}x - 1 \xrightarrow{x=-2} g'(-2) = -\frac{7}{3}$$

$$t(x) = mx + b \xrightarrow{m=-\frac{7}{3};\, y=\frac{10}{3};\, x=-2} \frac{10}{3} = \left(-\frac{7}{3}\right)\cdot(-2) + b \Rightarrow b = -\frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow t(x) = \left(-\frac{7}{3}\right)x - \frac{4}{3}$$

4.) Punkte zu den Steigungen finden

An welchen Stellen besitzen die Funktionen f(x) und g(x) die folgenden Steigungen?

a) $f(x) = \frac{2}{3}x^2 - 2x - 3$ m = **1**

b) $g(x) = \frac{1}{4}x^3 - x$ m = **-1**

Anmerkung: Gesucht sind nur die x-Werte.

Lösung:

$$f(x) = \frac{2}{3}x^2 - 2x - 3 \xrightarrow{\text{Ableitung}} f'(x) = \frac{4}{3}x - 2 = 1$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{9}{4}$$

$$g(x) = \frac{1}{4}x^3 - x \xrightarrow{\text{Ableitung}} g'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 1 = -1$$

$$\Rightarrow \quad x = 0$$

5.) Beweis

Zeigen Sie, dass folgende Behauptung korrekt ist:

Eine Tangente an die Funktion $f(x) = x$ kann niemals parallel zu einer Tangente der Funktion $g(x) = \frac{1}{x}$ verlaufen.

Lösung:

Beh.: $\exists\, x_0 \; mit \; f'(x_0) = g'(x_0)$

Bew.:

$$f(x) = x \xrightarrow{\text{Ableitung}} f'(x) = 1 \overset{!}{=} 0$$

$$g(x) = \frac{1}{x} \xrightarrow{\text{Ableitung}} g'(x) = -\frac{1}{x^2} \overset{!}{=} 0$$

$$f'(x) \overset{!}{=} g'(x) \xrightarrow{\text{eingesetzt}} 1 = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow x^2 = -1$$

nicht lösbar bzw. Widerspruch $x \in \Re$

$\Rightarrow$ es existiert kein $x_0 \; mit \; f'(x_0) = g'(x_0)$

6.) Monotonie und Extremwerte

Geben Sie die **Monotonieintervalle und die Extremwertstellen** der folgenden Funktionen an:

a) $f(x) = x^2 - 3x + 2$

b) $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2$

c) $f(x) = \frac{1}{x} + 1$

Anmerkung: Führen Sie bitte als Beweis Ihrer Ausführungen die notwendige Probe durch

Lösung:

$$f(x) = x^2 - 3x + 2 \xrightarrow{\text{Ableitung}} f'(x) = 2x - 3 \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \quad I_1 = \left]-\infty; \frac{3}{2}\right[\quad \text{monoton fallend} \qquad f'(0) = -3 < 0$$

$$\Rightarrow \quad I_2 = \left]\frac{3}{2}; \infty\right[\quad \text{monoton steigend} \qquad f'(2) = 1 > 0$$

$$\Rightarrow \quad \textit{Extremwertstelle}: \quad x = \frac{3}{2}$$

$$f(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \xrightarrow{\text{Ableitung}} f'(x) = 2x^2 - x \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \quad x(2x-1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \wedge x_2 = \frac{1}{2}$$

$$I_1 = \left]-\infty; 0\right[\quad \text{monoton steigend} \qquad f'(-1) = 3 > 0$$

$$\Rightarrow \quad I_2 = \left]0; \frac{1}{2}\right[\quad \text{monoton fallend} \qquad f'\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{8} < 0$$

$$I_2 = \left]\frac{1}{2}; \infty\right[\quad \text{monoton steigend} \qquad f'(1) = 1 > 0$$

$$\Rightarrow \quad \textit{Extremwertstellen}: \quad x_1 = 0 \wedge x_2 = \frac{1}{2}$$

$$f(x) = \frac{1}{x}+1 \xrightarrow{\text{Ableitung}} f'(x) = -\frac{1}{x^2} \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \quad -1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{keine Lösung für x}$$

$$\Rightarrow \quad I_1 =]-\infty;\infty[\quad \text{monoton fallend} \quad f'(1) = -1 < 0$$

$$\Rightarrow \quad \textit{keine Extremwertstelle}$$

7.) Kurvenuntersuchung

Gegeben seien folgende Funktionen: $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 1$

und $g(x) = -\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{5}{4}\right)$

a) Ermitteln Sie die Schnittpunkte der beiden Funktionen.

b) Berechnen Sie den Extremwert von f(x) und beweisen Sie mittels geeigneter Untersuchung, welche Art von Extremum vorliegt.

c) Zeigen Sie, dass die Funktionen in den Schnittpunkten **nicht** senkrecht aufeinander stehen.

Lösung:

Schnittpunkte:

$$f(x) = g(x) \quad \Rightarrow \quad -\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{5}{4}\right) = \frac{1}{2}x^2 + x - 1$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + \frac{5}{4}x + \frac{1}{4} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -\frac{1}{4} \quad \wedge \quad x_2 = -1$$

$$\Rightarrow \quad S_1\left(-\frac{1}{4} \,\middle|\, -\frac{39}{32}\right) \quad \wedge \quad S_2\left(-1 \,\middle|\, -\frac{3}{2}\right)$$

Extremwert:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 1 \xrightarrow{\text{Ableitung}} f'(x) = x + 1 \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \quad x = -1 \quad \Rightarrow \quad f(-1) = -\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{ll} I_1 =]-\infty;-1[& \text{monoton fallend} \quad f'(-2) = -1 < 0 \\ I_2 =]-1;\infty[& \text{monoton steigend} \quad f'(0) = 1 > 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad \textit{Extremwert}: \quad E\left(-1 \,\middle|\, -\frac{3}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \textit{Tiefpunkt / Minimum}$$

Senkrecht in den Schnittpunkten???:

$$f'(x) = x + 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} f'(-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad m_{f1} = 0 \\ f'\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad m_{f2} = \frac{3}{4} \end{array}$$

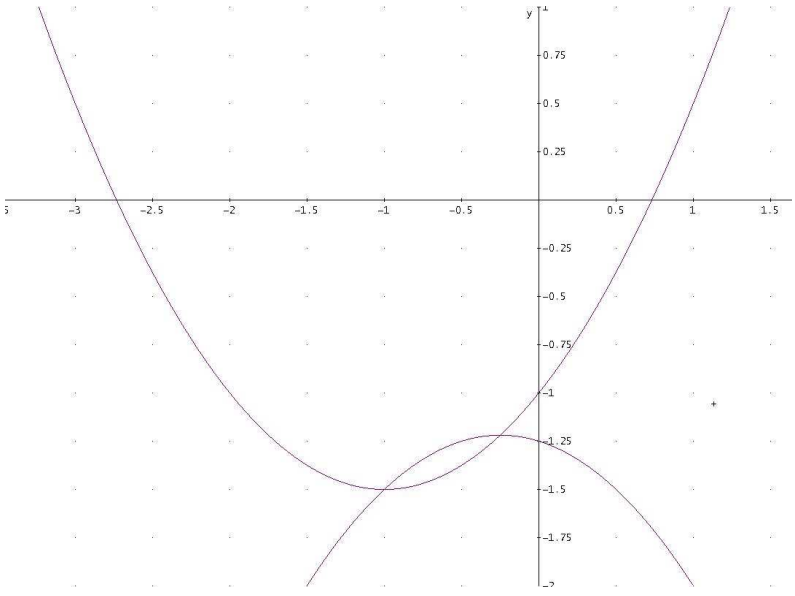
$$g'(x) = -x - \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} g'(-1) = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad m_{g1} = \frac{3}{4} \\ g'\left(-\frac{1}{4}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad m_{g2} = 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad m_{f1} \cdot m_{g1} = 0 \cdot \frac{3}{4} = 0 \neq (-1)$$

$\Rightarrow$ $f(x)$ ist nicht orthogonal zu $g(x)$

$$\Rightarrow \quad m_{f2} \cdot m_{g2} = \frac{3}{4} \cdot 0 = 0 \neq (-1)$$

$\Rightarrow$ $f(x)$ ist nicht orthogonal zu $g(x)$

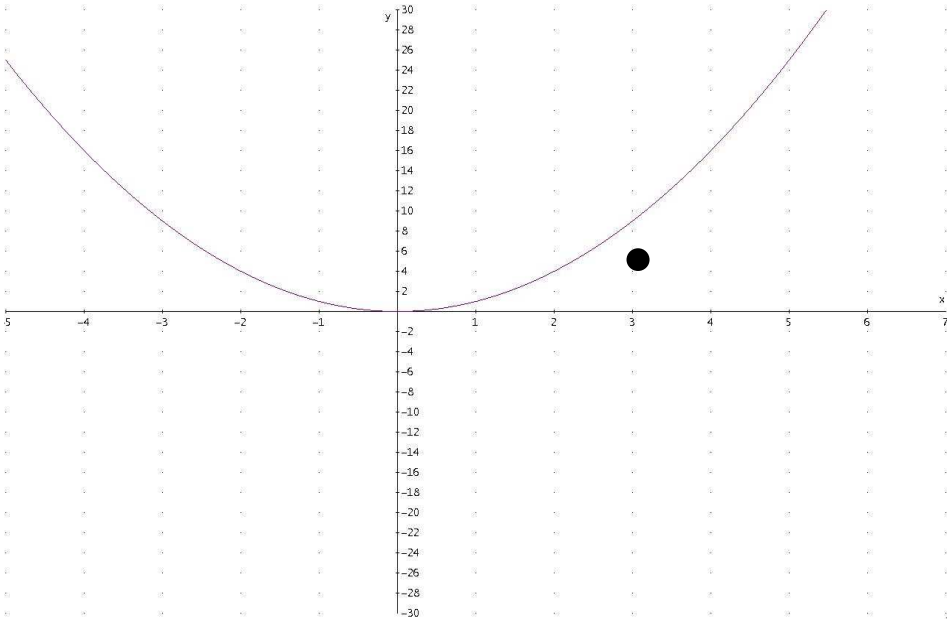


8.) Tangente an eine Funktion

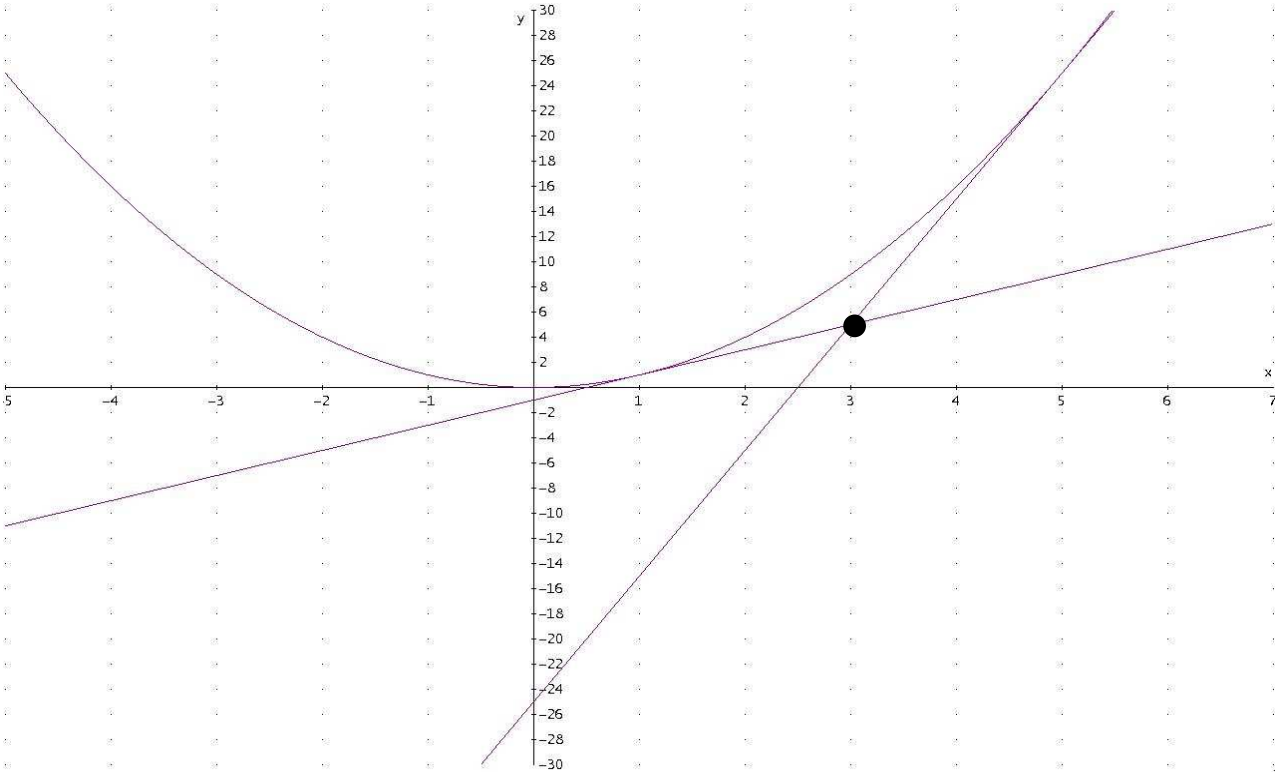
Gegeben seien folgende Funktion $f(x) = x^2$ und der Punkt $P(3 \mid 5)$.
Vom Punkt P aus können zwei Punkte an die Funktion gelegt werden.

a) Konstruieren Sie die beiden Tangenten in der folgenden Anlage.

b) Ermitteln Sie die Funktionsvorschriften der beiden Tangentengleichungen.



Lösung:



Analytische Ermittlung der Tangentengleichungen:

Ansatz: *Steigung der gesuchten Tangente = Wert der Ableitung der Funktion*

$$f(x)=x^2 \qquad f'(x)=2x \qquad \textit{Tangentenpunkt}: Q\left(a \mid f(a)\right)$$

$$m=\frac{f(a)-5}{a-3}=f'(a)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a^2-5}{a-3}=2a \quad \Rightarrow \quad a^2-5=2a(a-3) \quad \Rightarrow \quad a^2-6a+5=0$$

$$\Rightarrow \quad a_1=1 \quad \wedge \quad a_2=5$$

Tangente in $a_1=1$*:*

$$a_1=1 \quad \Rightarrow \quad f(a)=a^2=1 \quad \Rightarrow \quad f'(a)=2a=2$$

$$\xrightarrow{\textit{Ermittlung von b}} \quad 1=2\cdot 1+b \quad \Rightarrow \quad b=-1 \quad \Rightarrow \quad t_1(x)=2x-1$$

Tangente in $a_2=5$*:*

$$a_1=5 \quad \Rightarrow \quad f(a)=a^2=25 \quad \Rightarrow \quad f'(a)=2a=10$$

$$\xrightarrow{\textit{Ermittlung von b}} \quad 25=10\cdot 5+b \quad \Rightarrow \quad b=-25 \quad \Rightarrow \quad t_1(x)=10x-25$$

9.) Summen, Fakultäten und Binomialkoeffizienten

a) $\sum_{i=1}^{40} i$

Lösung: $\sum_{i=1}^{40} i = \frac{40 \cdot 41}{2} = 820$

---

b) $(x-2)^4$

Lösung:

$(x-2)^4$

$= \binom{4}{0} x^4 \cdot (-2)^0 + \binom{4}{1} x^3 \cdot (-2)^1 + \binom{4}{2} x^2 \cdot (-2)^2 + \binom{4}{3} x^1 \cdot (-2)^3 + \binom{4}{4} x^0 \cdot (-2)^4$

$= x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16$

---

c) $\frac{(n+2)!}{n!}$

Lösung: $\frac{(n+2)!}{n!} = (n+1) \cdot (n+2)$

---

d) $\sum_{i=4}^{13} (i-3) + \sum_{i=1}^{10} i$

Lösung:

$\sum_{i=4}^{13} (i-3) + \sum_{i=1}^{10} i \overset{\text{Indexverschiebung}}{=} \sum_{i=4-3}^{13-3} (i+3-3) + \sum_{i=1}^{10} i$

$\sum_{i=4}^{13} (i-3) + \sum_{i=1}^{10} i = 2 \cdot \sum_{i=1}^{10} i = 2 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} = 110$